mgr Adrian Karpowicz
Uniwersytet Gdański
Instytut Matematyki

Monotoniczne metody iteracyjne dla hiperbolicznych równań różniczkowo-funkcyjnych

Zajmiemy się konstruktywnymi metodami otrzymywania rozwiązań w sensie Carathéodory'ego dla następującego hiperbolicznego równania różniczkowo-funkcyjnego:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y,u_{(x,y)}) + g(x,y,u_{(x,y)}) & \text{p.w. w } I = [0,a] \times [0,b], \\ u(x,y) = \psi(x,y) \qquad \text{na } I_0 = [-a_0,a] \times [-b_0,b] \setminus (0,a] \times (0,b], \end{cases} \tag{1}$$

gdzie funkcje $f, g : I \times C(D, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ zmiennych (x, y, ω) spełniają warunki Carathéodory'ego. Operator Hale'a $u_{(x,y)} : [-a_0, 0] \times [-b_0, 0] \to \mathbb{R}^k$ zdefiniowany jest wzorem $u_{(x,y)}(s,t) = u(s+x, t+y)$ dla $(s,t) \in [-a_0, 0] \times [-b_0, 0]$. Powyższe równanie przedstawia szeroką klasę równań, do której w szczególności należą równania z odchylonym argumentem czy równania różniczkowo-całkowe.

Najpierw podamy warunki, przy których ciągi $\{v^n\}$, $\{w^n\}$ zdefiniowane wzorami

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y,v^n_{(x,y)}) + g(x,y,w^n_{(x,y)}) & \text{p.w. w } I, \\ \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y,w^n_{(x,y)}) + g(x,y,v^n_{(x,y)}) & \text{p.w. w } I, \\ v^{n+1}(x,y) = w^{n+1}(x,y) = \psi(x,y) & \text{na } I_0, \end{cases} \tag{2}$$

będą zbieżne liniowo i monotonicznie do jedynego rozwiązania rozważanego zagadnienia. Następnie stosując metodę quasilinearyzacji do zagadnienia (1) otrzymamy ciągi $\{v^n\}$ i $\{w^n\}$ dane wzorami

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y,v^n_{(x,y)}) + g(x,y,v^n_{(x,y)}) & \\ \quad + \frac{\partial f}{\partial \omega}(x,y,v^n_{(x,y)})(v^{n+1}_{(x,y)} - v^n_{(x,y)}) + \frac{\partial g}{\partial \omega}(x,y,w^n_{(x,y)})(v^{n+1}_{(x,y)} - v^n_{(x,y)}) & \text{p.w. w } I, \\ \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y,w^n_{(x,y)}) + g(x,y,w^n_{(x,y)}) & \\ \quad + \frac{\partial f}{\partial \omega}(x,y,v^n_{(x,y)})(w^{n+1}_{(x,y)} - w^n_{(x,y)}) + \frac{\partial g}{\partial \omega}(x,y,w^n_{(x,y)})(w^{n+1}_{(x,y)} - w^n_{(x,y)}) & \text{p.w. w } I, \\ v^{n+1}(x,y) = w^{n+1}(x,y) = \psi(x,y) & \text{na } I_0. \end{cases} \tag{3}$$

Ciągi te będą zbieżne kwadratowo i monotonicznie do jedynego rozwiązania rozważanego zagadnienia. Funkcje startowe v^0, w^0 takie, że $v^0 \leq w^0$, wybieramy tak, aby były w przypadku (2) parą stowarzyszonych dolnego i górnego rozwiązania zagadnienia (1). Natomiast w przypadku (3) będą dolnym i górnym rozwiązaniem zagadnienia (1).