mgr Arkadiusz Misztela
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Matematyki i Informatyki

Rozwiązania aproksymacyjne równań Hamiltona-Jacobiego-Bellmana z górnie półciągłym Hamiltonianem

W pracy rozważamy układy H-J-B równań $-U_t+H(t,x,-U_x)=0$ z Hamiltonianami górnie półciągłymi, o liniowym wzroście i wypukłymi ze względu na ostatnią zmienną. Dla takich Hamiltonianów można określać funkcje wartości $V:[0,T]\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ wzorem

$$V(t_0,x_0)=\inf_{x(\cdot)\in AC[t_0,T]\ \ x(t_0)=x_0} g(x(T))+\int_{t_0}^{T} L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt,$$

$$\text{gdzie}\ \ L(t,x,f):=H^*(t,x,p)$$

które na ogół nie muszą być dolnie półciągłymi rozwiązaniami (w sensie Frankowskiej), a nawet można wskazać gładką funkcję wartości niebędącą klasycznym rozwiązaniem równania H-J-B. Funkcja wartości przy powyższych założeniach na Hamiltonian jest dolnie półciągła i posiada trajektorię optymalną. To nas zmotywowało do wprowadzenia aproksymacyjnego rozwiązania, które definiujemy w następujący sposób:

Definicja. Powiemy, że funkcja $U:[0,T]\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ jest aproksymacyjnym rozwiązaniem równania $-U_t+H(t,x,-U_x)=0$, jeśli istnieją ciągi $U_n:[0,T]\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ i $H_n:[0,T]\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ takie, że

1. H_n jest górnie półciągła, ma liniowy wzrost, jest wypukła ze względu na ostatnią zmienną i spełnia warunek silnej Lipschitzowskości, ponadto $H_n\searrow H$,
2. U_n jest dolnie półciągłym rozwiązaniem $-U_t+H_n(t,x,-U_x)=0$,
3. U_n jest lokalnie Lipschitzowska i $U_n\nearrow U$.

Dla aproksymacyjnego rozwiązania uzyskaliśmy następujący rezultat dotyczący istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu H-J-B:

Twierdzenie. *Jeśli Hamiltonian H jest górnie półciągły, ma liniowy wzrost i jest wypukły ze względu na ostatnią zmienną oraz $g:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ jest ograniczoną z dołu dolnie półciągłą funkcją, to w klasie funkcji spełniających warunek brzegowy z g funkcja wartości V, stowarzyszona z L i g (gdzie L jest dualny do H), jest jedynym aproksymacyjnym rozwiązaniem równania $-U_t+H(t,x,-U_x)=0$.*

Bibliografia

[1] G. Buttazzo, G. Dal Maso, Γ-*convergence and optimal control problems*, J. Optim. Theory Appl. 38 (1982), 385–407.

[2] H. Frankowska, *Lower semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, SIAM J. Control Optim. 31 (1993), 257–272.

[3] S. Plaskacz, M. Quincampoix, *On representation formulas for Hamilton Jacobi's equations related to calculus of variations problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 20 (2002), 85–118.

Słowa kluczowe: Hamiltona-Jacobiego-Bellmana równania, Bolza problem, lepkościowe rozwiązania, monotoniczna aproksymacja, półciągły Hamiltonian.