dr Urszula Skwara
Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki

Wpływ różnych zaburzeń stochastycznych na układ symbiozy

Zależności pomiędzy dwoma gatunkami żyjącymi w symbiozie mogą być opisane następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{cases} x' = (a_1 + b_1 y - c_1 x)x \\ y' = (a_2 + b_2 x - c_2 y)y, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $a_i, b_i, c_i > 0$ $(i = 1, 2)$, $x(t)$, $y(t)$ oznaczają wielkości poszczególnych gatunków w chwili t. Ponieważ populacje podlegają fluktuacjom losowym otoczenia, bardziej realistyczny jest model stochastyczny. Zakładając, że wpływ otoczenia jest reprezentowany przez zaburzenie stochastyczne i to zaburzenie jest proporcjonalne do liczby osobników, uzyskujemy następujący układ równań stochastycznych

$$\begin{cases} dX(t) = \big((a_1 + b_1 Y(t) - c_1 X(t))\,dt + \rho_{11}\,dW_1(t) + \rho_{12}\,dW_2(t)\big)X(t), \\ dY(t) = \big((a_2 + b_2 X(t) - c_2 Y(t))\,dt + \rho_{21}\,dW_1(t) + \rho_{22}\,dW_2(t)\big)Y(t), \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $a_i, b_i, c_i > 0$ $(i = 1, 2)$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera, $X(t)$, $Y(t)$ oznaczają rzeczywiste procesy stochastyczne reprezentujące populacje poszczególnych gatunków. Rozważamy trzy rodzaje zaburzeń stochastycznych:

(i) słabo skorelowane, tzn. $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} \neq= 0$;
(ii) mocno skorelowane, tzn. $\rho_{11} > 0$, $\rho_{21} > 0$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 0$;
(iii) tylko jedna populacja jest stochastycznie zaburzana, ze względu na symetrię układu (2) zakładamy, że druga populacja jest zaburzana, tzn. $\rho_{11} = 0$, $\rho_{21} > 0$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 0$.

W każdym z poszczególnych przypadków badamy zachowanie się trajektorii procesów $X(t)$, $Y(t)$ oraz ich rozkładów, gdy czas zmierza do nieskończoności, i uzyskujemy podobne wyniki.