Margareta Wiciak
Politechnika Krakowska, Instytut Matematyki

Transformata Fouriera uogólnionego iloczynu tensorowego dystrybucji

Niech B będzie przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}'_{\text{temp}}(\mathbb{R}, B) = \mathcal{D}'_{\text{temp}}$ oznacza przestrzeń dystrybucji temperowanych. Z każdą dystrybucją $T \in \mathcal{D}'_{\text{temp}}$ możemy związać jej rozszerzenie na przestrzeń funkcji szybko malejących $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\bar{T} \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}), B)$.

Mówimy, że odwzorowanie

$$S : \mathbb{R} \ni x \mapsto S(x) \in \mathcal{D}'_{\text{temp}}$$

jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, jeśli istnieje seminorma p na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ taka, że $\overline{S(x)} \in \mathcal{L}((S(\mathbb{R}), p), B)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i odwzorowanie $\bar{S} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \overline{S(x)} \in \mathcal{L}((S(\mathbb{R}), p), B)$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Niech $T \in \mathcal{D}'_{\text{temp}}$, zaś $S : \mathbb{R} \ni x \mapsto S(x) \in \mathcal{D}'_{\text{temp}}$ będzie klasy $\mathcal{C}^\infty$. Uogólnionym iloczynem tensorowym dystrybucji T i odwzorowania S nazywamy dystrybucję

$$(T \odot S)\varphi = T(S(x)\varphi(x, \cdot)) \quad \text{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

W referacie podamy warunki, przy których iloczyn $T \odot S$ jest dystrybucją temperowaną, i pokażemy, jak obliczać transformatę Fouriera takiego iloczynu.

Tego typu zagadnienia są istotne przy modelowaniu drgań płyty z akuatorami piezoelektrycznymi. Klasyczne równanie drgań giętnych płyty jest postaci

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} w + D\Delta^2 w = f, \tag{1}$$

gdzie $w = w(t, x, y)$ oznacza przemieszczenie punktu (x, y) płyty w chwili t, f – wymuszenie, stała D jest walcową sztywnością płyty na zginanie, μ – gęstością płyty na jednostkę powierzchni. Załóżmy, że po obu stronach płyty przyklejono aktuator piezoelektryczny, o kształcie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$, gdzie f_1, f_2 są klasy $\mathcal{C}^\infty$. Aktuator ten jest zasilany zmiennym napięciem V. W tej sytuacji momenty wewnętrzne indukowane przez aktuator można zapisać jako uogólniony iloczyn tensorowy dystrybucji

$$m_x = m_y = C_0 \epsilon_{pe} \left([H_{x_1} - H_{x_2}] \odot [H_{f_1(x)} - H_{f_2(x)}] \right),$$

gdzie $C_0 = E_p IK$, $E_p I$ oznacza sztywność płyty na zginanie, K jest stałą geometryczną zależną od grubości płyty i elementu piezoelektrycznego. H_{x_i} jest funkcją Heaviside'a, $[H_{x_i}]$ oznacza dystrybucję regularną generowaną przez funkcję H_{x_i}. W konsekwencji wymuszenie pochodzące od rozważanego aktuatora wyraża się wzorem

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2},$$

przy czym pochodne rozumiane są jako pochodne dystrybucji, a równanie (1) jest ewolucyjnym równaniem dystrybucyjnym o niewiadomej $w : [0, T] \ni t \mapsto w(t) \in \mathcal{D}'_{\text{temp}}(\mathbb{R}^2, B)$.

Literatura

[1] E. K. Dimitriadis, C. R. Fuller, C. A. Rogers, *Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates*, Journal of Vibration and Acoustics 113 (1991), 100–107.

[2] M. Wiciak, *A solution of the Cauchy problem in the class of absolutely continuous distribution valued functions*, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica 42 (2004), 31–53.

[3] J. M. Sullivan, J. E. Hubbard, Jr., S. E. Burke, *Modeling approach for two-dimensional distributed transducers of arbitrary spatial distribution*, J. Acoust. Soc. Amer. 99:5 (1996), 2965–2974.