Zakres egzaminu na Studia Doktoranckie

Spis zagadnień z podstawowej tematyki matematycznej dla kandydatów na studia doktoranckie na kierunki matematyka i matematyka stosowana

Poniższy spis odzwierciedla zakres tematyki obowiązującej wszystkich kandydatów. Konkretne hasła mają charakter przykładowy. Uwaga: kandydat otrzymuje trzy pytania dotyczące tematyki ujętej poniżej i odpowiada na dwa z tych pytań, wybrane przez siebie.

1. Liczby rzeczywiste oraz zespolone i ich własności. Ciągi i ich granice. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Warunek Cauchy`ego. Kryteria istnienia granicy.
2. Szeregi liczbowe rzeczywiste i zespolone. Kryteria zbieżności szeregów. Szeregi warunkowo i bezwzględnie zbieżne. Mnożenie szeregów.
3. Funkcje. Ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji. Własności funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym. Własność Darboux.
4. Rachunek różniczkowy funkcji rzeczywistych jednej zmiennej. Twierdzenia Rolle`a i Lagrange`a. Badanie przebiegu funkcji.
5. Szeregi funkcyjne. Zbieżność punktowa i jednostajna. Szeregi potęgowe. Promień i koło zbieżności. Rozwinięcie Taylora.
6. Całka nieoznaczona. Całka Riemanna. Całki niewłaściwe.
7. Pochodne cząstkowe i pochodna kierunkowa. Gradient. Jakobian. Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Funkcje uwikłane.
8. Teoria miary i całki Lebesgue`a. Przechodzenie do granicy pod znakiem całki. Twierdzenie Fubiniego.
9. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, Greena i Stokes`a.
10. Funkcje analityczne. Równania Cauchy-Riemanna. Wzór całkowy Cauchy`ego. Zasada maximum.
11. Przestrzeń Banacha. Funkcjonały i operatory liniowe. Przestrzeń sprzężona. Przestrzeń Hilberta. Przestrzenie $\mathbf{L^p}$. Przestrzenie funkcji ciągłych.
12. Wyznaczniki i równania liniowe. Przestrzenie liniowe i afiniczne. Zbiory algebraiczne I i II stopnia i ich klasyfikacja.
13. Grupy. Grupy cykliczne. Grupy permutacji. Homomorfizmy grup. Jądro. Dzielnik normalny i grupa ilorazowa. Twierdzenie Lagrange`a o rzędzie podgrupy.
14. Pierścienie przemienne. Ideał. Ideały maksymalne i pierwsze. Homomorfizmy pierścieni. Dzielniki zera. Elementy odwracalne. Ciało ułamków.
15. Ciała. Ciało proste. Charakterystyka ciała. Ciało algebraicznie domknięte, zasadnicze twierdzenie algebry. Pierwiastki z jedności.
16. Przestrzenie metryczne i topologiczne. Sposoby wprowadzania topologii. Operacje na przestrzeniach. Twierdzenie Tichonova.
17. Przekształcenia ciągłe. Twierdzenie Tietzego.
18. Przestrzenie ośrodkowe. Przestrzenie spójne. Przestrzenie zwarte.
19. Przestrzenie zupełne. Zbiór Cantora i jego własności.
20. Grupa podstawowa. Twierdzenie Jordana o rozcinaniu. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.
21. Warunkowa wartość oczekiwana, definicja, własności, podstawowe charakterystyki i proste przykłady dla zmiennych losowych dyskretnych i ciągłych.
22. Rodzaje zbieżności ciągów zbieżnych losowych. Prawa wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne.
23. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach.
24. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Spis zagadnień z rozszerzonej tematyki matematycznej dla kandydatów na studia doktoranckie na kierunki matematyka i matematyka stosowana

Poniższy spis odzwierciedla zakres tematyki obowiązującej wszystkich kandydatów. Konkretne hasła mają charakter przykładowy. Uwaga: Kandydat wybiera dwa spośród czterech wskazanych poniżej zakresów tematycznych i otrzymuje jedno pytanie ze wskazanych przez siebie dwóch zakresów.

I. Statystyka i metody obliczeniowe.

Statystyki dostateczne, definicja i własności. Testowanie hipotez statystycznych; poziom istotności i moc testu. Teoria estymacji - nierówność Cramera-Rao. Metody numeryczne rozwiązywania układów równań liniowych i nieliniowych, numeryczna poprawność. Numeryczna aproksymacja funkcji.

II. Równania różniczkowe cząstkowe.

Podstawowe typy zagadnień brzegowych (brzegowo-początkowych) dla równań eliptycznych, parabolicznych i hiperbolicznych. Zagadnienie poprawnie postawione w sensie Hadamarda. Pojecia rozwiązania klasycznego i uogólnionego. Tw. Laxa-Milgrama. Zasady maksimum. Tw. Sobolewa o zanurzeniu i o śladzie. Tw. O punkcie stałym w zastosowaniu do nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Związki równań eliptycznych z zagadnieniami wariacyjnymi. Metoda Galerkina. Dystrybucje i rozwiazania podstawowe.

III. Algebra i topologia.

Twierdzenie Baire`a i metoda kategorii. Przestrzenie nakrywające, grupa podstawowa, nakrycie uniwersalne. Przestrzenie rzutowe. Wielościany. Rozmaitości topologiczne.
Ciała skończone. Mnożenie tensorowe. Teoria podzielności w pierścieniach bez dzielników zera. Moduły nad pierścieniem.
Elementy algebraiczne względem ciała. Stopień elementu algebraicznego. Ciało rozkładu wielomianu. Automorfizmy ciała. Zbiory algebraiczne. Przestrzenie rzutowe.

IV. Analiza i geometria różniczkowa.

Gładkie podrozmaitości w przestrzeni euklidesowej i ich odwzorowania. Krzywizna i skręcenie krzywej w $\mathbf{E}^3$. Pierwsza i druga forma podstawowa rozmaitości. Kierunki i krzywizny główne. Krzywizna Gaussa i średnia. Symbole Christoffela i Twierdzenie Egregium. Przesunięcie równoległe. Krzywe geodezyjne. Rozmaitości różniczkowe, mapy i atlasy. Rozmaitości Riemanna. Rozmaitości z brzegiem. Twierdzenie Stokesa na rozmaitościach. Odwzorowania konforemne. Operatory zwarte na przestrzeniach Banacha.