Warszawa, 19 września 2023

dr hab. Marcin Bobieński
Instytut Matematyki, Wydział MIMUW
ul. Banacha 2,
02-097 Warszawa.
e-mail: M.Bobienski@mimuw.edu.pl.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Bartłomieja Zawalskiego

Rozprawa doktorska p. Zawalskiego jest podzielona na trzy dość niezależne od siebie części. Pierwsze dwie są wyraźnie inspirowane pięknym twierdzeniem Auerbacha, Mazura, Ulama charakteryzującym elipsoidę obrotową poprzez jej przekroje. Trzecia ma nieco odmienny charakter i klasyfikuje gładkie bryły, które posiadają pewną algebraiczną własność funkcji miar przekrojów wzdłuż wszystkich podprzestrzeni określonego wymiaru.

Część pierwsza

Motywacją tej części pracy jest hipoteza Banacha, w której stawiane jest pytanie czy izometryczność wszystkich k-wymiarowych cięć przestrzeni skończonego wymiaru B^n ($1 < k < \dim B^n = n$) implikuje strukturę przestrzeni Hilberta na B^n. Warto wspomnieć, że pozytywną odpowiedź na hipotezę Banacha w przypadku $n = 3$ daje wspomniane wcześniej twierdzenie Auerbacha, Mazura, Ulama. Bezpośrednią motywacją stawianego problemu jest pytanie, które pojawia się w pracach poświęconych cząstkowym wynikom dotyczącym hipotezy Banacha (w wyższych wymiarach). Pytanie formułuje następujacy problem: czy obrotowa symetria cięć bryły za pomocą hiperpowierzchni przenosi się na obrotową symetrię samej bryły.

Głównym wynikiem pierwszej części pracy jest twierdzenie I.1.2 orzekające, że jeżeli wszystkie cięcia bryły $K \subset \mathbb{R}^n$ hiperpowierzchniami mają symetrię obrotową to sama bryła K też. Założeniem jest centralna symetria bryły oraz regularność (C^3) brzegu. Poprzez symetrię obrotową jest rozumiana grupa ortogonalna $O(n-1)$.

Autor stosuje w dowodzie metody geometrii różniczkowej w odniesieniu do brzegu bryły $M = \partial K$ oraz do przecięć brzegu bryły z hiperpowierzchnią. Z tego też powodu założona regularność brzegu byłaby trudna do usunięcia. Pierwszym krokiem jest wskazanie klasy lokalnych współrzędnych w otoczeniu dowolnego punktu o dodatnio okreslonej drugiej formie podstawowej. W tych współrzędnych rozważana powierzchnia jest (lokalnie) wykresem funkcji, której część kwadratowa jest standardowym iloczynem skalarnym na przestrzeni euklidesowej; kluczową rolę odgrywa analiza części trzeciego stopnia oznaczonej symbolem c_f. Korzystając z założenia symetrii przecięć autor dowodzi, że c_f zeruje się na pewnej podprzestrzeni kowymiaru 2 a więc c_f jest wielomianem przywiedlnym. Ciekawym aspektem dowodu jest fakt, że korzysta on z istotnie różnych metod w przypadku $n \geq 5$ oraz dla $n = 4$. W pierwszym przypadku są to metody algebraiczne a w drugim metody topologii algebraicznej i analiza klas Stiefela-Whitneya wiązki stycznej do $Gr(2,3)$. Dowód głównego twierdzenia kończy dość techniczny ale elementarny fakt, że istnienie trzech podprzestrzeni kowymiaru 2 generujących symetrię $O(n-2)$ implikuje symetrię $O(n-1)$ bryły K.

Część druga

W tej cześci celem było scharakteryzowanie w terminach równań różniczkowych cząstkowych kiedy wykres funkcji f klasy gładkości $W^{3,1}_{loc}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) jest zawarty w pewnej kwadryce w

$\mathbb{R}^3$. Autor podaje układ dwóch nieliniowych równań cząstkowych rzadu 3. Głównym wynikiem jest twierdzenie II.1.2 orzekające, że przy dodatkowym założeniu że Hessian f nie jest niedodatni, ten układ równań stanowi warunek konieczny i dostateczny aby wykres był zawarty w kwadryce. Warunek związany ze znakiem Hessianu okazuje się być istotny co pokazuje twierdzenie II.1.4 opisujące listę możliwych powierzchni otrzymywanych jako (lokalne) rozwiązania tego samego układu PDE. Struktura dowodu tej części pracy jest bardzo przejrzysta, choć miejscami rozumowanie wymaga długich rachunków, do których autor używa programu do obliczeń symbolicznych (Mathematica). Rozważany jest następujący układ funkcji:

$$\{x^2, xy, xf, y^2, yf, f^2, x, y, f, 1\}.$$

Na dowolnej kwadryce te funkcje są w oczywisty sposób liniowo zależne, więc dowolny (uogólniony) Wrońskian tego układu funkcji musi znikać. Ta obserwacja jest przeniesiona na pierścień różniczkowy generowany przez zmienne oraz (formalne) pochodne cząstkowe. Kluczowym elementem dowodu jest rozważenie anihilatora kwadryki w tym pierścieni różniczkowym (przy dodatkowym założeniu generyczności). Autor wykazał (Proposition II.3.5), że wspomniany anihilator jest generowany dokładnie przez te dwa równania różniczkowe, które wystepują w głównym twierdzeniu. Tworzą one zredukowaną bazę Grobnera tego ideału. Drugim istotnym elementem dowodu jest wykazanie regularności rozwiąznaia. Okazuje się, że każde słabe rozwiazanie przedmiotowego układu równań jest automatycznie gładkie (Lemat II.4.1), co pozwala analizować dowolne uogólnione wyznaczniki Wrońskiego układu funkcji. W dowodzie gładkości użyty jest piękny argument polegający na zdefiniowaniu w terminach pochodnych f pary funkcji (u, v), które spełniają równwnia Cauchy-Riemanna.

Używając powyżej omówionych faktów autor dowodzi, że rozważany układ PDE jest równoważny temu, że wykres f jest zawarty w kwadryce przy założeniu generyczności f używajc wyniku K. Wolssona z 1989 roku. Dalsza część dowodu obu głównych twierdzeń jest raczej elementarna, bezpośrednia i bazuje na analizie możliwych przypadków.

Wartym zauważenia jest różnorodność metod stosowanych przez autora w dowodzie. Poczynajac od analizy funkcjonalnej, przez algebrę przemienna i analizę zespoloną. W mojej osobistej ocenie jest to najładniejsza i najciekawsza ze wszystkich trzech częsci przedstawionej rozprawy doktorskiej.

Część trzecia

Ta część rozprawy dotyczy problemu *k-separowalnej całkowalności* (ang. k-separably integrability) bryły $K \subset \mathbb{R}^d$. Pojęcie to oznacza, że miary przekrojów K z obszarem $\{x : \, dist(x, H^{\perp}) \leq t\}$, gdzie $H \in Gr(k, d)$ wyrażają się skończoną sumą produktów funkcji ciągłych na $Gr(k, d)$ oraz parametru t. Źródła tego pojęcia odnajdujemy w pracach Newtona natomiast w czasach współczesnych zainteresowanie tym pojęciem pochodzi od Arnolda. Wynik mgr. Zawalskiego wpisuje się w aktywny obszar współczenych badań publikowanych w bardzo dobrych czasopismach.

Głównym wynikiem tej części jest pełna klasyfikacja wypukłych, gładkich brył k-seprowalnie całkowalnych w zależności od (k, d) przy założeniu centralnej symetrii. Okazuje się, że jedynymi takimi bryłami są elipsoidy lub kule w zależności od parzytości $d - k$. Stanowi to uogólnienie rezultatu Koldobsky, Merkurjev, Yaskin przy dodatkowym założeniu symetrii, które jednak jest istotne i trudne do usunięcia.

Główne kroki dowodu głównego twierdzenia są następujące. W oparciu o wypukłą, symetryczną bryłę K zdefiniowany został funkcjonał Minkowskiego. Następnie, korzystając z wyników prac [Koldobsky] oraz [Ovall] autor uzyskuje rozwinięcie potęgowe w parametrze t przedmiotowej funkcji miary wycinka $V_{K,H}$ w terminach całki z funkcjonały Minkowskiego. Założenie k-separowalnej całkowalności implikuje, że dowolne pochodne po parametrze t funkcji miary $V_{K,H}$ są liniowo zależne w $t = 0$ co prowadzi do tożsamości, która ma postać zerowania się skończonej kombinacji liniowej pochodnych $V_{K,H}$. Używając wcześniejszych formuł na rozwinięcie autor otrzymuje tożsamość całkową, która ostatecznie prowadzi do wniosku, że transformata Fouriera pewnej dystrybucji zdefiniowanej za pomocą operatora Laplace'a oraz potęg funkcjaonału Minkowskiego jest wielomianem. Jest to bardzo elegancka część dowodu, w któej autor swobodnie używa wielu nietrywialnych narzędzi analitycznych.

Dalsza część dowodu ma algebraiczny charakter. Korzystając z narzędzi algebry wielomianów i rozszerzeń ciał autor uzyskuje fakt, że funkcjonał Minkowskiego jest pierwiastkiem jednorodnego wielomianu określonej postaci. Ostatni argument, który kończy dowód, polega na elementarnej analizie operatora Laplace'a w obciąciu do algebry wielomianów od współrzędnych przestrzeni R^d oraz funkcjonału Minkowskiego. Dzięki poprzednio uzyskanemu wynikowi, w algebrze tej pojawi się tylko *skończenie wiele* wykładników funkcjonału Minkowskiego.

Konkluzja

Przedstawioną mi do recenzji pracę oceniam bardzo wysoko. Pierwszą rzeczą, która rzuca się w oczy jest staranne zredagowanie rozprawy, które ułatwia czytanie zaawansowanych wyników matematycznych. Dowodzone fakty i cytaty są dobrze oznaczone, struktura logiczna przemyślana. Zwraca też uwagę staranny język.

Ponadto, co chciałbym szczególnie mocno podkreślić, autor używa zaawansowanych metod z bardzo odległych działów matematyki, takich jak analiza funkcjonalna, geometria algebraiczna, algebra przemienna, topologia algebraiczna, geometria różniczkowa. Dowodzone twierdzenia związane sa z dużymi, ważnymi pytaniami, jak Hipoteza Banacha oraz wpisują się w aktywny obszar badań. Wyniki są eleganckie i nie mają bardzo technicznego charakteru. Za przykład niech posłuzy część druga, w której autor podaje charakteryzację w terminach równań cząstkowych warunku aby wykres funkcji tworzył kwadrykę. Mnie własnie ta druga część najbardziej się podobała.

Reasumując, moim zdaniem, praca mgr. Zawalskiego zawiera oryginalne oraz eleganckie rozwiązania problemów matematycznych. Autor wykazał się umiejętnością prowadzenia samodzielnej pracy naukowej jak również dużą biegłością w posługiwaniu się szerokim spektrum zaawansowanych metod matematycznych. Uważam, że przedstawiona mi do recenzji praca spełnia z dużym zapasem ustawowe jak również zwyczajowe warunki stawiane przed rozprawami doktorskimi i wnoszę o dopuszczenie mgr. Zawalskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy. Motywacją wyróżnienia jest spory nadmiar uzyskanych wyników w stosunku do wymagań stawianych przed doktoratem. W mojej ocenie dowolne dwie z przestawionych trzech części mogłyby stanowić podstawę dobrego doktoratu.

dr hab. Marcin Bobieński