prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
grzegorz.plebanek@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 30 lipca 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej Damiana Głodkowskiego

1. Informacje ogólne

Mgr Damian Głodkowski przedstawił rozprawę

Some applications of set theory in Banach spaces and operator algebras,

przygotowaną pod kierunkiem prof. Piotra Koszmidera. Praca jest napisana po angielsku; jej zasadnicza część zajmuje ponad sto stron. Ma charakter jednolitego tekstu, prezentującego rezultaty zawarte w

(i) wspólnej publikacji Doktoranta i Promotora (PAMS, 2022);
(ii) samodzielnej publikacji Głodkowskiego (J. Funct. Anal., 2023);
(iii) preprincie dostępnym na portalu ArXiv, napisanym wraz z Agnieszką Widz (doktorantką UWr).

Oprócz tego, ostatni rozdział rozprawy omawia wyniki własne Doktoranta, które, jak rozumiem, nie były wcześniej prezentowane w innej formie. Rezultaty rozprawy dotyczą, najogólniej rzecz ujmując, wybranych zagadnień dotyczących izomorficznej struktury (najczęściej nieośrodkowych) przestrzeni Banacha.

2. Omówienie głównych wyników rozprawy

Rozprawa poświęcona jest czterem odrębnym zagadnieniom i dlatego jej główne rozdziały są od siebie w zasadzie niezależne.

2.1. **Sigma-ideał generowany przez hiperpłaszczyzny.** Rozważa się tutaj dowolne przestrzenie Banacha X wymiaru > 1. W takiej przestrzeni podprzestrzenie kowymiaru 1 generują nietrywialny σ-ideał $\mathcal{I}(X)$. W swojej wspólnej publikacji Głodkowski i Koszmider podjęli się systematycznej analizy czterech współczynników kardynalnych tego ideału. Są to klasyczne wielkości *additivity, uniformity, covering, cofinality*, powszechnie stosowane w teorii mnogości, opisujące zachowanie się danego σ-ideału przy nieprzeliczalnych operacjach. W omawianym kontekście *the covering number* $\operatorname{cov}(\mathcal{I}(X))$ można zdefiniować jako minimalną ilość hiperpłaszczyzn potrzebnych do pokrycia całej przestrzeni X.

Opierając się na starym rezultacie Klee autorzy dowodzą na wstępie, że wszystkie cztery współczynniki są równe ω_1 bądź $\mathfrak{c}$ dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha. Następnie dowodzi się, że wszystkie trzy współczynniki poza cov można w zasadzie wyliczyć dla dowolnej przestrzeni X.

Ustalenie wartości $\mathrm{cov}(\mathcal{I}(X))$ w dowolnym przypadku prowadzi do daleko ciekawszych rozważań. Zachodzą oszacowania $\omega_1 \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{I}(X)) \leqslant \mathfrak{c}$, ale pytanie, czy równość

$$(*) \quad \omega_1 = \mathrm{cov}(\mathcal{I}(X))$$

zachodzi w ZFC dla każdej nietrywialnej przestrzeni X pozostaje otwarte. Autorzy dowodzą, że $(*)$ zachodzi w niektórych modelach teorii mnogości oraz pokazują związki tej równości ze znanym z topologii zagadnieniem przestrzeni zwartych o małej przekątnej. Inne rezultaty pokazują, że $(*)$ można wykazać bez dodatkowych aksjomatów w przestrzeniach Banacha posiadających jakąś dodatkową strukturę, na przykład fundamentalny ciąg bi-ortogonalny. Te wszystkie twierdzenia demonstrują, że pytanie o powyższą równość stanowi bardzo ciekawe zagadnienie, naturalnie łączące strukturę nieośrodkowych przestrzeni Banacha z teoriomnogościową topologią.

2.2. **Przestrzeń $C(K)$ *czytająca* wymiar topologiczny K.** Twierdzenie Miljutina orzeka, że przestrzeń $C(K)$ jest izomorficzna z $C(2^\omega)$ dla każdej nieprzeliczalnej przestrzeni metrycznej zwartej K. Pytanie, czy dowolna przestrzeń $C(K)$ jest izomorficzna z przestrzenią postaci $C(L)$ dla pewnej zero-wymiarowej przestrzeni L, długo pozostawało otwarte[1]. Dopiero na początku tego stulecia Piotr Koszmider zaprezentował swoją konstrukcję spójnej przestrzeni zwartej K z *małą algebrą operatorów* i dzięki temu wykazał, że $C(K)$ nie dopuszcza takiej zero-wymiarowej, izomorficznej reprezentacji.

Głównym wynikiem rozdziału 3 jest konstrukcja zwartej przestrzeni K ustalonego wymiaru pokryciowego, takiej że jeżeli istnieje izomorfizm pomiędzy przestrzeniami Banacha $C(K)$ i $C(L)$ to L ma ten sam wymiar pokryciowy. Indukcyjna konstrukcja w języku granic odwrotnych silnie korzysta z pierwotnej konstrukcji Koszmidera i jego pomocniczych rezultatów, ale wkład własny autora jest bardzo istotny i daleko nietrywialny. Nowatorska część to szereg technicznych pomysłów pozwalających pokonać trudności, jakie powstają przy kontrolowaniu wymiaru pokryciowego granicy systemu odwrotnego przestrzeni topologicznych. Dlatego indukcyjna konstrukcja musi pamiętać wiele własności pośrednich obiektów i jej złożoność jest znaczna (jeśli nie astronomiczna...), wymaga wyjątkowej biegłości i żelaznej dyscypliny. Dodajmy, że wszystkie te trudności udało się pokonać dzięki założeniu aksjomatu Jensena $\diamondsuit$; pozostaje niejasne, czy konstrukcję można przeprowadzić w zwykłej teorii mnogości.

2.3. **Algebry Boole'a z własnościami Grothendiecka i Nikodyma.** Klasyczne twierdzenie Nikodyma z teorii miary (zasada jednostajnej ograniczoności dla zbieżnego ciągu miar na σ-ciele) oraz własność Grothendiecka przestrzeni Banacha naturalnie

[1]tutaj K, L oznaczają zawsze zwarte przestrzenie Hausdorffa

prowadzą do definicji algebr Boole'a z własnościami Grothendiecka (G) i Nikodyma (N). Te własności mają trochę wspólnych cech, ale nie są równoważne — istnieje stosunkowo prosty przykład algebry z własnością (N), która nie ma tej drugiej własności. Przez wiele lat jedynym przykładem algebry Grothendiecka bez własności (N) był efektem starej konstrukcji Talagranda, przeprowadzonej przy założeniu hipotezy continuum.

Główny wynik rozdziału 4 rozprawy orzeka, że niesprzecznie, $\omega_1 < \mathfrak{c}$ i istnieje algebra Boole'a mocy ω_1 z własnością (G), ale bez własności (N). Choć od publikacji Talagranda minęło 40 lat, jest to dopiero drugi rezultat dotyczący zagadnienia[2]. Wynik Głodkowskiego i Widz jest interesujący, wymagał nowych pomysłów — najbardziej oczywisty sposób na wymuszenie własności Grothendiecka prowadzi do indukcyjnej konstrukcji algebry mocy continuum.

Rozdział 4 zawiera szczegółową analizę elementów, na których konstrukcja bazuje. Tak jak w przypadku twierdzenia Talagranda, podstawowy pomysł to rozważanie podzbiorów zbioru Cantora postaci $\{-1, 1\}^\omega$, które są dostatecznie symetryczne: przeskalowane całek z rzutów na poszczególne osie (względem miary produktowej) prowadzi do nieograniczonego ciągu miar zbieżnego na takich zbiorach do zera. Nowym pomysłem jest zbudowanie pojęcia forcingu, który w obrębie owym symetrycznych zbiorów zbuduje małą algebrę Grothendiecka.

Muszę zaznaczyć, że analiza owych zbiorów symetrycznych jest bardzo obszerna i jej dokładne przestudiowanie wydaje się przekraczać ramy czasowe pisania niniejszej recenzji. Z drugiej strony, dla mnie osobiście ta część rozdziału 4 jest inspirująca. Niektóre szczegóły wspomnianej pracy Talagranda są, nie tylko w moim odczuciu, miejscami niejasne. Mając w ręku owoce pracy Głodkowskiego i Widz można będzie, z nowym animuszem, próbować skonstruować żądaną algebrę Boole'a bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych.

2.4. **Algebra Calkina.** W ostatniej części autor przedstawia swój rezultat dotyczący C^*-algebr. Algebra Calkina, czyli algebra operatorów na przestrzeni Hilberta modulo ideał operatorów zwartych jest od lat ulubionym obiektem badań matematyków biegłych w teorii mnogości — ci odkryli, że pod wieloma względami obiekt ten jest *niekomutatywną* wersją przestrzeni $\beta\omega \setminus \omega$.

Rozdział 5 nawiązuje do pracy Brech i Koszmidera dowodzącej, że w modelu Cohena ℓ_∞-suma prosta przestrzeni ℓ_∞/c_0 nie zanurza się w przestrzeń Banacha ℓ_∞/c_0. Zaprezentowany tu rezultat orzeka (w szczególności), że w tym samym modelu teorii mnogości, ℓ_∞-suma prosta algebr Calkina nie zanurza się w algebrę Calkina. Warto to porównać z niedawnym wynikiem Faraha, Hirsberga i Vaccaro: przy załozeniu hipotezy continuum algebra Calkina jest uniwersalna w klasie C^*-algebr gęstości $\leqslant \mathfrak{c}$.

[2]Niezależnie i w tym samym czasie Sobota i Zdomskyy udowodnili, że w konstrulcji Talagranda można zastąpić CH przez aksjomat Martina.

3. Ocena rozprawy

Przeprowadzone tu krótkie omówienie wyników Doktoranta nie unikało stwierdzeń wartościujących. W tym miejscu należy postawić kropkę nad i: Moja opinia o recenzowanej rozprawie jest bardzo wysoka. Udowodnienie zaprezentowanych rezultatów wymagało znacznej biegłości w posługiwaniu się technikami teorii mnogości i dość rozległej wiedzy w obszarze analizy funkcjonalnej czy też topologii. Autor uzyskał kilka znaczących, ciekawych wyników, prezentując subtelne i bardzo złożone rozumowania.

Jak na rozprawę doktorską, praca ma nieco przytłaczającą długość. Trzeba jednak stwierdzić, że Doktorant poświęcił wiele miejsca na przybliżenie głównych idei, zamieszczając omówienia na różnym stopniu ogólności. Tekst jest napisany bardzo starannie, podaje precyzyjne cytowania i klarownie wykłada argumenty. Zamieszczone omówienia szeroko zakreślają kontekst prezentowanych twierdzeń i dokumentują erudycję młodego matematyka.

Autor prezentuje możliwie kompletne dowody i dlatego wspomnę, że w 2.3.1 brakuje wyjaśnienia, dlaczego funkcja $\lambda \mapsto y_\lambda$ jest różnowartościowa. Istotniejsze niż tego typu uwagi jest następujące pytanie:

Czy tego nie da się zrobić prościej?

Takie pytanie nurtowało mnie po wysłuchaniu odczytu Doktoranta na seminarium we Wrocławiu, poświęconemu twierdzeniu z rozdziału 3. Nasza późniejsza wspólna dyskusja przekonała mnie jednak, że moje pomysły nie pozwoliły uchwycić wszystkich aspektów konstrukcji. Mam natomiast wrażenie, że początek rozdziału 4 mógłby być zredagowany w sposób bardziej przystępny. Na pewno warto zacząć od ustalenia, że zbiór A uważamy za *semibalanced* jeśli $\lim_n \Big(n\varphi_n(A)\Big) = 0$ — wtedy 4.2.8 jest prostą uwagą, która natychmiast wyjaśnia, jak negujemy własność Nikodyma. Zapewne później niezbędne jest podanie parametrycznych wersji tej definicji. Być może warto poszukać lepszego warunku na własność (G) w 4.2.10 — ta będąca w użyciu jest bardzo techniczna, a i tak musi odwoływać się do miar przenoszonych na przestrzeń Stone'a. Warto zaznaczyć, że fakt 4.2.12 jest w cytowanej książce dowodzony w nieco innej postaci (jako Lemma 5.2.8; zapewne ta różnica wynika z tego, że zaglądałem do pierwszego wydania monografii).

4. Konkluzja

Rozprawa doktorska mgr. Damiana Głodkowskiego prezentuje oryginalne rozwiązania problemów naukowych — ich dowody wymagały złożonych argumentów i wielu nowatorskich pomysłów. Tym samym recenzowana rozprawa spełnia wymagania ustawowe i oczekiwania środowiska naukowego, zakreślone dla tego etapu kariery naukowej.

Mając na względzie wagę uzyskanych przez Doktoranta wyników i zaprezentowany przez niego znakomity warsztat matematyczny, nie mam wątpliwości, że rozprawa zasługuje na wyróżnienie.