U$_{\mathbf{A}}$M Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Wydział Matematyki
i Informatyki
ul. Umultowska 87
61–614 Poznań

Adam Mickiewicz University
Faculty of Mathematics
and Computer Science
telfax: + 48-61-8295313

prof. dr hab Wojciech J. Gajda
Zakład Geometrii Algebraicznej
i Diofantycznej UAM

Poznań, 16.09.2024

Recenzja pracy doktorskiej

$\mathcal{D}$-modules on Rigid Analytic Varieties
magistra Feliksa Rączki

Termatem rozprawy doktorskiej pana Rączki jest skończoność wymiarów przestrzeni liniowych kohomologii de Rhama $H^*_{dR}(X, \mathcal{M})$ holonomicznego $\mathcal{D}_X$-modułu $\mathcal{M}$ na gładkiej rozmaitości sztywnej X nad ciałem K z dyskretną niearchimedesową waluacją równej charakterystyki zero. Pierwszym przykładem takiego ciała K jest ciało $\mathbf{C}((t))$ szeregów Lauranta o współczynnikach zespolonych. Główne wyniki pracy stosują się do znacznie szerszej klasy ciał bazowych. [1] Rozprawa pana Rączki stanowi kompilację z dwóch preprintów [Rą24a] i [Rą24b] tego autora (dostępnych w sieci, ale jak dotąd jeszcze nie zrecenzowanych), uzupełnioną o rozdział zawierający próbę ilościowego wzmocnienia głównego wyniku pracy [Rą24a] w przypadku krzywych.

Dla zachowania zwięzłości tej recenzji skoncentruję uwagę na wartości merytorycznej otrzymanych wyników oraz na poprawności i sile dowodów. Pominę omówienie szerszego kontekstu, w którym lokują się rezultaty udowodnione przez pana Rączkę. Zainteresowanych tym szerszym kontekstem odsyłam do dobrze napisanego wstępu do rozprawy oraz do tekstu opinii jednego z promotorów, która znajduje się w dokumentacji przewodu doktorskiego.

Najważniejszy rezultat pracy pana Rączki (Theorem 1.2.2: o tym, że wymiar $\dim_K H^i_{dR}(X, \mathcal{M}) < \infty$ dla $i \geqslant 0$, przy naturalnych założeniach na X) jest **wynikiem ważnym oraz nowym**, nawet dla modułów stowarzyszonych z wiązkami o koneksji całkowalnej, przy tym też dla wiązki trywialnej na X.

[1] W recenzji swobodnie korzystam z oznaczeń, definicji i z listy literatury omawianej pracy.

Warto przypomnieć, że poza klasycznym twierdzeniem de Rhama znanym z wykładów topologii algebraicznej, problem skończoności kohomologii de Rhama może mieć różne rozstrzygnięcia zależnie od przyjętego ciała definicji i od kategorii modułu lub rozmaitości. Twierdzenie pana Rączki zaskoczyło mnie swoją ogólnością. Mówi, że kohomologia de Rhama, mimo wszystkich znanych przeszkód i ograniczeń, stanowi jednak cenny niezmiennik algebraiczny pary $(X, \mathcal{M})$, co najmniej dla X nad ciałem takim jak $\mathbf{C}((t))$. Po lekturze dowodu twierdzenia 1.2.2 w naturalny sposób nasuwa się pytanie o wyrażenie wymiarów kohomologii z twierdzenia za pomocą niezmienników modułu i rozmaitości. Autor w ostatnim rozdziale pracy przedstawia swoje pierwsze wyniki w tym kierunku uzyskując w przypadku krzywych nowy dowód znanej formuły Deligne'a na indeks wiązki z koneksją (Thm. 4.2.8, Thm. 4.2.11). Przypuszczam, że w niedalekiej przyszłości metody rozwinięte w pracy pana Rączki znajdą nowe ciekawe zastosowania do algebraicznego opisu operatorów różniczkowych na rozmaitościach sztywnych nad $\mathbf{C}((t))$. Niewątpliwie omawiana rozprawa rozbudza u recenzenta nadzieje na takie zastosowania.

Dowód twierdzenia 1.2.2 cieszy różnorodnością zastosowanych technik. Poczynając od teorii $\mathcal{D}-$modułów na rozmaitościach sztywnych argument autora korzysta z metod algebry homologicznej, z pewnych standardowych technik algebry przemiennej i geometrii algebraicznej, aż po aparat teorii algebr Banacha i niearchimedesowej analizy funkcjonalnej. Pomysł na dowód oparty jest na redukcji do klasycznego twierdzenia Bernsteina o skończoności kohomologii de Rhama w przypadku rozmaitości nad ciałem liczb zespolonych. Sam proces redukcji do twierdzenia Bernsteina jest jednak nieoczywisty i kilkustopniowy. Dlatego wymaga oddzielnego i dokładniejszego omówienia.

- W pierwszym kroku dowodu autor przedstawia wyniki z [Rą24a] o modułach minimalnego wymiaru nad uzupełnioną algebrą Weyla. Dla polidysku Tate'a $X{=}\mathbf{B}^n$ niech $\mathcal{D}_n$ będzie jego algebrą Weyla, a $\widehat{\mathcal{D}}_n$ jej uzupełnieniem względem normy operatorów różniczkowych. Autor dowodzi skończoności kohomologii de Rhama dla $\mathcal{D}_{\mathbf{B}^n}$-modułu $\mathcal{M}$ holonomicznego i skończenie prezentowalnego. (Proposition 3.3.1). Kluczowym faktem w dowodzie jest twierdzenie 3.1.1, które pozwala przejść do uzupełnienia $\hat{\mathcal{M}}$ modułu $\mathcal{M}$ względem płaskiej zmiany bazy $\mathcal{D}_n \to \widehat{\mathcal{D}}_n$ zachowując przy tym przejściu kohomologie de Rhama (Lemma 3.3.3).
- Dowód twierdzenia 3.1.1 (por. [Rą24b], Thm. 1.2) opiera się na użyciu całego arsenału środków algebry homologicznej i algebry przemiennej. W końcowej części dowodu autor używa arytmetyki krat w $\widehat{\mathcal{D}}_n$-module do obliczenia kohomologii ich redukcji na ideale pierwszym pierścienia waluacji i do porównania z kohomologią na włóknie generycznym.

Ta część rozprawy jest moim zdaniem najlepsza i najważniejsza. Jej zwieńczenie stanowi izomorfizm kohomologii de Rhama $H^*_{dR}(\mathbf{B}^n, \mathcal{M})$ z kohomologią de Rhama pewnego indukowanego $\mathcal{D}$-modułu nad ciałem reszt, co pozwala w końcu zastosować twierdzenie Bernsteina dla dowodu skończoności wymiarów.

- Pozostała część dowodu twierdzenia 1.2.2 jest już bardziej typowa i mniej złożona technicznie. Na początek autor rozważa przypadek, gdy X posiada domknięte zanurzenie w polidysku $i{:}X \to \mathbf{B}^n$ (Proposition 3.4.1). Na szczególną uwagę w tym dowodzie zasługuje lemat 3.4.2, który pozwala na ograniczenie się do przypadku polidysku dzięki zastosowaniu własności algebraicznych funktora *pchnięcia do przodu* i_+ modułu holonomicznego (adoptowanych przez autora do przypadku geometrii sztywnej z pierwszego rozdziału książki [HTT08]).
- Dla zakończenia dowodu twierdzenia 1.2.2 (już w pełnej ogólności) autor wybiera otwarte pokrycie rozmaitości X za pomocą afinoidów, dla których spełnione są założenia poprzednio dowiedzionego przypadku. Ponieważ rozmaitość X jest z założenia quazi-zwarta, to pokrycie można wybrać skończonym. Do wybranego pokrycia stosujemy klasyczny ciąg spektralny hiperkohomologii Čecha zbieżny do kohomologii de Rhama $H^i_{dR}(X, \mathcal{M})$, tak aby w końcu wywnioskować skończoność wymiaru tych ostatnich K-przestrzeni.

Konkluzja.

Niniejszym stwierdzam, że przedłożona przez pana Feliksa Rączkę praca :

D-modules on Rigid Analytic Varieties

spełnia wszystkie wymogi Ustawy z 20 lipca 2018 w stosunku do rozprawy doktorskiej z matematyki. Wnoszę o dopuszczenie pana mgra Feliksa Rączki do dalszych etapów postępowania w przewodzie doktorskim.

Jednocześnie zwracam się do rady naukowej Instytutu Matematycznego PAN w Warszawie z wnioskiem o **wyróżnienie omawianej rozprawy** ze względu na wysoki poziom zawartych w niej wyników naukowych oraz na wyjątkową orginalność zastosowanych technik matematycznych.

cc. prof. dr hab. Wojciech Jerzy Gajda

Załączam listę szczegółowych komentarzy i poprawek do tekstu napisaną po angielsku w języku orginału ocenianej pracy. W zdecydowanej wększości (być może za wyjątkiem kilku komentarzy) te uwagi są mniejszej wagi i dlatego **nie odbierają** rozprawie pana Rączki wartości merytorycznej. Listę korekt przekazałem już autorowi za pomocą poczty elektronicznej.

Suggested corrections.

p.5, l.-9: I think the sentence shall finish: ... *by any algebraically closed field of zero characteristic.*

p.8, l.-9: Repeat here that A is the Tate algebra $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

p.8, l.12: There is a dot missing in *i.e.*, . There's a similar typo at **p.10, l.5**.

p.12, l.2: Replace *the affine line* by *the affine n-space.*

p.16, l.1: In the formulation of Theorem 1.3.7 describe your A, r and v_i.

p.25, l.-8: Fix your choice of $(\Gamma, \leqslant)$ for codomain of valuations: a well-ordered (commuative and discrete, if required) group.

p.28, l.6: Just after presentation exact sequences keep adding a phrase: *where a_1 and a_2 are non negative integers.*

p.30, l.5 and 6: Combine the sentences, so line 6 starts then with: *is an L-vector space.*

p.31, l.-12: A wrong reference: there is no Lemma 2.1.22 in the thesis but there is Proposition 2.1.22.

p.31, l.-6: A misprint: *generate* and not *generates*. Two lines below: define the 0-1 multi indicies e_i.

p.32, l.1: A wrong reference: there is no Lemma 2.1.22 in the thesis but there is Proposition 2.1.22.

p.33, l.9: A misprint. It shall read: $\Omega^1_{X|U}$.

p.33 l.-4: For completeness of exposition I suggest to add a short proof of the important (and not difficult) Lemma 2.1.28, following [Zav]. Most likely the arXives notes of Zavyalov are not meant for publication. Moreover, the issue of existence of suitable coordinate systems (following the lemma) shall be treated with more care. I have not found a single reference to this lemma in the rest of the thesis. Can you indicate later on by precise references (at few crucial points in the argument, e.g. , at page 88) where and how you use Lemma 1.2.28 ?

p.35 l.-8: A misprint. It shall read: *For such a module ... .*

p.38. I have spotted a couple of misprints in the proof of Lemma 2.2.7: **l.12** - replace w with x and ψ with φ in the equality at the end of the line, **l.-6** - replace $\varphi(x)$ with $\varphi(\mathrm{v})$.

p.39, l.8: There is a misprint in the sentence above the sequence (2.7). It shall end with: *is such a module then ... (2.7).*

p.46, l.7: Left side of the equality shall read: $\nabla^i(\alpha \otimes m)$.

p.49, l.4: Word *map* is missing at the end of the line.

p.49, l.-6: $Der_K(A, A){:=}Der_K(A)$ - keep one notation (cf. Lemma 2.3.5).

p.52, l.14: A typo: *Int*.

p.53, l.4: In formulation of Lemma 2.3.14 fix assumptions on K, V and W.

p.54, l.10 ff: There is definitely some mess in the begining of the proof of Lemma 2.3.14 when one replaces families $\{L_n\}$ and $\{R_n\}$ by the primed families. I think the correct choices for the primed operators shall be: $L'_n{:=}L_{m_{n-1}+1} \dots L_{m_n}$, for $n{\geqslant}1$ with $m_0{:=}0$, and similarly for $R'_n s$. Please, carefully redo following 6 lines of computations. The result of [Sin75, Lemma 2.1] (which you are adopting for the nonarchimedian case) is classical and really pretty, so I believe in your Lemma 2.3.14. However, some care is needed as always. On the other hand, let me add in passing, that I find continuity results on differential operators which you have proven in Theorem 2.3.12 and Theorem 2.3.13 quite strong and interesting.

p.54, l.-10: A misprint: remove a redundant *that*.

p.57, l.7: Replace A_i with $A/\wp_i$.

p.59, l.9: A misprint in the notation for an Ext group: an extra comma.

p.60, l.3: Define and call the K-linear map properly. In the moment it is rather confusing.

p.61, l.9: Replace ∇_{∂_1} at the right hand side of the equality by ∇_{∂_i}.

p.62, l.-2: A misprint: *aboveL*.

p.62, l.-1: It shall read: *... is a resolution of ... .*

p.64, l.5: Something is wrong: is really $\mathcal{D}_X(U){=}D_A$, for any $U \subset X$?

p.66: There is a conflict in notation in the begining of section 2.3.7. Letter X denotes both variety and a tangent vector. Change notation for tangent vectors. At the same page in line -3 there is a typo at the right hand side of the equality. There is a redundant t. I think you wanted a transpose X^t.

p.68, l.6: There is a typo in (2.38). The last r at the right hand side of the formula for $i_+\mathcal{M}$ shall be replaced by n.

p.71, l.7: *globally finitely presented*

p.73 l.3: Recall here definition of the n-th Weyl algebra $\mathbb{W}_n(\mathcal{O}_\mathcal{K})$.

p.73, l.10: Can you give a precise reference for the compatibility of Gauss and operator norms on $\mathcal{D}_n$? It shall follow by the basics stated in chapter 2.

p.74, l.9: Correct the definition of the Bernstein filtration. What is the filtration index? Is it really n? The ring of integers is missing at the right hand side.

p.74, l.-1: $\mathbb{W}_n(\mathcal{O}_K)$

p.75, l.2: A misprint. There shall be $\widehat{\mathcal{D}}_n^{\circ}$ instead of $\widehat{\mathcal{D}}_{\circ}$.

p.76, l.3: I think that your $R{:=}\widehat{\mathcal{D}}_n$ and its filtration is indexed by non positive integers. Later, in the dimension bound quoted after [LvO96], the entry at the right hand side is missing a dimension symbol.

p.76, l.-1: Change the notation for the kernel in the exact sequence. Letter K has been already used for a base field.

p.77, l.-5 and -6: Two Ext groups have wrong indicies. There'll be $\widehat{\mathcal{D}}_n^{\circ}$ instead of $\widehat{\mathcal{D}}_{\circ}$.

p.78: At least four Ext groups at this page have wrong indicies: **l.-13**, **l.-10**, twice in line **l.-7** and in **l.-6.**

Be aware that your arXives preprint 2402.04683v1 at page 10 contains the same string of misprints in the indexing of Ext groups (copied into the thesis by cut & paste). It has made my reading of this important proof difficult at places. A similar comment concerns your preprint 2405.03028v1. Use my list of corrections for necessary proof reading of both preprints.

p.80, l.-11: Remove a redundant word *consider*.

p.83, l.-4: Correct $M' := M[\partial_{r+1}, \dots, \partial_n]$.

p.84, l.3: A misprint. It shall be corrected to: $\partial^\alpha = \partial_{r+1}^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_{n-r}}$. Same page, **l.-3**: Correct a misprint in the codomain of the pairing.

p.85, l.-13: I have foud the construction of the map in line -13 somewhat sloppy. Add a diagram explaing how you combine (3.11) and (3.12) in order to get the map.

p.86, l.2: It shall start with $(f^{i+1}\delta^i - \delta^i f^{i+1})$.

p.92, l.14: I'd rather map $x \mapsto \mathrm{v}_x$.

p.98, l.13: *... no non-zero zero divisors ... .*

p.99, l.-5: There shall be $\mathcal{L}(nD)$ at the left hand side of the equality.

p.105: There shall be $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ instead of $\mathcal{M}$ in de Rham cohomology groups in s.e.s. (4.18).

p.106, l.4: Add at the end of the line: *... , for f_i as in (1).* Same page, **l.12**: At the end of the line there shall appear a condition: $a_k a_m \neq 0$. In the next line put in $\mathrm{v}_\infty(f) = m$.

Final remarks (for Mr. Feliks Rączka).

You have written a very good thesis. Your main result indicates that, despite all the known obstructions, de Rham cohomology of holonomic D-modules on rigid varieties is useful, at least if K is like $\mathbb{C}((t))$. One can dream of an extension to higher dimensions of Deligne's formula of the last chapter, e.g., to operators on some surfaces. On the other hand, I wonder if given right homotopy theory of rigid varieties, one could use your approach (via valuation theory of operators and $\mathcal{D}$-modules) to attempt algebraic index formulas for holonomic operators (base field $\mathbb{C}((t))$) as in Atiayh-Singer index theorem for elliptic operators over $\mathbb{C}$. Can you think of a replacement for the $\hat{A}$-genus in the rigid analytic case? Anyway, there are many natural and less obvious questions related to your project. Have fun extending and applying results of your thesis.

Best wishes and regards, WG