# AUTOREFERAT

## 1. Podstawowe informacje

1.1. **Imię i nazwisko: Volodymyr Berezovskyi.**

1.2. **Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:**

- dyplom magistra matematyki, Odeski Państwowy Uniwersytet, Wydział Mechaniki i Matematyki, 1984.
- stopień kandydata nauk fizyczno-matematycznych na podstawie rozprawy "O prawie geodezyjnych odwzorowaniach przestrzeni z koneksją afiniczną", promotor Prof. Josef Mikeš, Moskiewski Państwowy Uniwersytet Pedagogiczny, Wydział Matematyki, 1991.
  Certyfikacja dla tego stopnia została już nostryfikowana przez Uniwersytet im. Palacky'ego w Ołomuńcu, który jest równoważny ze stopniem doktora (Ph.D.) w programie P1102 Matematyki, dziedzina studiów 1101V003 Algebra i Geometria. Dokument jest załączony.
- tytuł docenta Katedry Fizyki i Matematyki Umańskiego Instytutu Rolniczego, 1995.

1.3. **Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:**

- 1986 – 1993 Kierownik Katedry Matematyki w Umańskim Państwowym Uniwersytecie Pedagogicznym, (1986 – 1987, asystent),
- 1993 – : Kierownik Katedry Matematyki i Fizyki w Umańskim Państwowym Uniwersytecie Ogrodnictwa, (1993 – 1999 docent).

1.4. **Osiągnięcia naukowe wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytułach naukowych oraz o stopniach i tytułach w zakresie sztuki:** jednotematyczny cykl 4 publikacji pod tytułem:

**Podstawowe równania typu Cauchy'ego pewnych odwzorowań przestrzeni Riemanna i przestrzeni z koneksją afiniczną.**

Publikacje wchodzące w skład w.w. osiągnięć:

[H1] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, A. Vanžurová, Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type $\pi_1$, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2) 37, No. 3, 647–659 (2014).

[H2] V.E. Berezovskii, N.I. Guseva, J. Mikeš, On special first-type almost geodesic mappings of affine connection spaces preserving a certain tensor, *Math. Notes* 98, No. 3, 515–518 (2015).

[H3] V.E. Berezovskii, N.I. Guseva, I. Hinterleitner, J. Mikeš, Conformal mappings of Riemannian spaces onto Ricci symmetric spaces, *Mat. Notes* 103, No. 2, 304–307 (2018).

[H4] V.E. Berezovskii, I. Hinterleitner, J. Mikeš, Geodesic mappings of manifolds with affine connection onto the Ricci symmetric manifolds, *Filomat* 32, No. 2, 379–385 (2018).

## 2. Dyskusja o naukowych osiągnięciach

W pracach [H1–H4] są również cytowane moje wcześniejsze publikacje [P1–P25]. Można je znaleźć w paragrafach 3.1 i 3.7. Publikacje innych autorów są podane na końcu tej rozprawy.

2.1. **Wprowadzenie.** Dyfeomorfizmy i automorfizmy uogólnionych przestrzeni geometrycznych stanowią jeden z najbardziej aktualnych kierunków badań w geometrii różniczkowej. Duża liczba publikacji jest poświęcona izometrycznym, homotetycznym, konforemnym, afinicznym, geodezyjnym, quasi-geodezyjnym, holomorficznie rzutowym, prawie geodezyjnym i innym odwzorowaniom, transformacjom i deformacjom.

**O specjalnych (szczególnych) odwzorowaniach przestrzeni Riemanna i przestrzeni z koneksją afiniczną.**

Odwzorowanie konforemne, transformacja konforemna lub odwzorowanie biholomorficzne są transformacjami, które lokalnie zachowują kąt między wektorami. Funkcja analityczna jest konforemna w każdym punkcie, w którym posiada niezerową pochodną. Odwrotnie, każde odwzorowanie konforemne o zmiennych zespolowych, które posiada ciągłe pochodne cząstkowe, jest analityczne. Odwzorowania konforemne mają duże znaczenie w analizie zespolonej, jak również w wielu obszarach fizyki i inżynierii.

Kilka ważnych kartograficznych rzutowań, włączając rzutowanie Mercatora są odwzorowaniami konforemnymi. Pierwszy nietrywialny przykład odwzorowań konforemnych był znaleziony przez Lagrangéa w 1779r; było to mianowicie stereograficzne rzutowanie sfery. Później, gdy tensorowe podejście zaczęło być bardziej powszechne w geometrii rózniczkowej, H. Weyl [93, 94], L.P. Eisenhart [21, 23] i inni rozwinęli nową, niezmienniczą i bardziej elastyczną teorię konforemnych odwzorowań. Modyfikację tej teorii możemy znaleźć n.p. w [44]. Wśród dyfeomorfizmów przestrzeni z koneksją afiniczną ważną rolę odgrywają geodezyjne i prawie geodezyjne odwzorowania. Teorie geodezyjnych i prawie geodezyjnych odwzorowań są właściwie oparte na pracy T. Levi-Civity [48], w której postawił i rozwiązał ten problem w specjalnym układzie współrzędnych między klasycznymi przestrzeniami Riemanna. Warto zauważyć, że było to związane z badaniem dynamiki mechanicznego układu równań. Później teorię geodezyjnych odwzorowań rozwijali T. Thomas, H. Weyl, L.P. Eisenhart, P.A.

Shirokov, K. Yano, A.Z. Petrov, A.S. Solodovnikov, N.S. Sinyukov, A.V. Aminova, R. Deszcz, J. Mikeš, I.G. Shandra, S.E. Stepanov i inni w pracach [11, 12, 39, 41, 43, 58, 59, 64, 82, 86, 88, 93, 99], i [H17].

Problemy podnoszone w badaniach odwzorowań geodezyjnych rozszerzali V.F. Kagan, V. Vranceanu, P.K. Rashevsky, L.Ya. Shapiro, V.D. Vedenyapin, A.Z. Petrov i inni. W szczególności pojęcie quasi-geodezyjnego odwzorowania wprowadził A.Z. Petrov. Bliskie jemu jest holomorficznie rzutowe odwzorowanie przestrzeni Kählera, które, jako pierwsi rozważali T. Otsuki i Y. Tashiro, patrz [59, 65, 82, 95].

Naturalnym uogólnieniem tych klas są prawie geodezyjne odwzorowania wprowadzone przez N.S. Sinyukova [82]. Potem prawie geodezyjne odwzorowania badali V.S. Shadny, V.S. Sobchuk, N.V. Yablonska, J. Mikeš, V.E. Berezovski, M.S. Stankovic, L.S. Velimirović, M.L. Zlatanović [85, 90, 91], patrz też [P17].

Ta praca jest bezpośrednio zwiazana z badaniem przestrzeni, które są uogólnieniem przestrzeni symetrycznych i rekurentnych wprowadzonych i rozważanych odpowiednio przez É. Cartana [8] i W. Walkera [92]. Są one w naszych rozważaniach obrazami specjalnych odwzorowań. Uogólnione symetryczne i rekurentne przestrzenie były studiowane w wielu pracach, np.: W. Roter [77], R. Deszcz [14, 15], L. Tamassy, T. Binh [4], Olszak [68–70], i innych.

**Podstawowe pojęcia teorii dyfeomorfizmu przestrzeni z koneksją afiniczną.** Rozważmy $n$-wymiarową przestrzeń z koneksją afiniczną bez skręcenia w układzie współrzędnych $x$ i założmy, że $n \geq 2$, niżej wszystkie funkcje na niej są dostatecznie gładkie. Podstawowe pojęcia teorii geodezyjnych i prawie geodezyjnych odwzorowań możemy znaleźć w [82] i [P17].

Założmy, że we wspólnym układzie współrzędnych $x = (x^1, \ldots, x^n)$ przestrzeń z koneksją afiniczną $A_n$ dopuszcza dyfeomorfizm $f$ na przestrzeń z koneksją afiniczną $\bar{A}_n$.

Niech

$$P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x),$$

gdzie $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ i $\Gamma_{ij}^h(x)$ są współrzędnymi obiektów koneksji afinicznych przestrzeni $A_n$ i $\bar{A}_n$ we wspólnym układzie współrzędnych $x$ zaś $P_{ij}^h$ jest tensorem deformacji $f$.

**Definicja 1.** Krzywa określona w przestrzeni $A_n$ jest nazywana *geodezyjną*, gdy jej wektor styczny jest równoległy wzdłuż niej.

**Definicja 2.** Krzywa określona w przestrzeni $A_n$ $(n > 2)$ jest nazywana *prawie geodezyjną*, jeżeli istnieje wzdłuż niej dwuwymiarowa równoległa płaszczyzna zawierająca jej wektor styczny.

**Definicja 3.** Dyfeomorfizm $f$ między dwiema przestrzeniami $A_n$ i $\bar{A}_n$ z koneksją afiniczną nazywamy *odwzorowaniem geodezyjnym*, gdy każda krzywa geodezyjna $A_n$ jest odwzorowana na krzywą geodezyjną przestrzeni $\bar{A}_n$ i vice versa.

Dyfeomorfizm $f$ jest odwzorowaniem geodezyjnym wtedy i tylko wtedy, gdy tensor deformacji $P^h_{ij}$ we wspólnym układzie współrzędnych ma następującą postać (*równanie Levi-Civity*)

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\delta^h_j + \psi_j(x)\delta^h_i, \tag{1}$$

gdzie $\delta^h_i$ jest symbolem Kroneckera a $\psi_i$ kowariantnym polem wektorowym. Jeżeli $\psi_i \equiv 0$, wtedy $f$ jest odwzorowaniem afinicznym.

**Definicja 4.** Dyfeomorfizm $f$: $A_n \to \bar{A}_n$ $(n > 2)$ nazywamy *odwzorowaniem prawie geodezyjnym* gdy każda krzywa geodezyjna $A_n$ jest odwzorowana na prawie geodezyjną krzywą $\bar{A}_n$.

Dyfeomorfizm $f$: $A_n \to \bar{A}_n$ jest prawie geodezyjnym wtedy i tylko wtedy, gdy tensor deformacji $P^h_{ij}$ we wspólnym układzie współrzędnych ma następującą postać

$$A^h_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a\ P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + b\ \lambda^h,$$

gdzie $A^h_{ijk} = P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}$ zaś $a$ i $b$ są pewnymi funkcjami zależnymi od $x^h$ i dowolnego wektora $\lambda^h$.

Tutaj i niżej symbol "," oznacza kowariantną pochodną w $A_n$.

N.S. Sinyukov [82] określił trzy typy prawie geodezyjnych odwzorowań $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ z podstawowymi równaniami. Możemy udowodnić, że jeżeli $n > 5$, to istnieją tylko trzy takie typy [P1], patrz też [P16, P17].

*Prawie geodezyjne odwzorowania typu* $\pi_1$ jest scharakteryzowane przez warunki

$$A^h_{(ijk)} = a_{(ij}\delta^h_{k)} + b_{(i}P^h_{jk)}, \tag{2}$$

gdzie $a_{ij}$ jest pewnym tensorem symetrycznym zaś $b_i$ pewnym kowektorem, nawias $(ijk)$ oznacza symetryzację indeksów $i, j, k$ (bez dzielenia).

Jeżeli w (2) kowektor $b_i$ jest równy zero, wtedy odwzorowanie nazywamy *kanonicznym*. Wiadomo, że dowolne prawie geodezyjne odwzorowanie typu $\pi_1$ może być przedstawione w formie złożenia kanonicznego prawie geodezyjnego odwzorowania typu $\pi_1$ i odwzorowania geodezyjnego [82].

**Układy równań różniczkowych cząstkowych typu Cauchy'ego.** Niewątpliwie istnienie rozwiązania podstawowych równań implikuje istnienie wspomnianych odwzorowań, transformacji i deformacji. Podstawowe równania znajdowano w różnych postaciach. Wśród nich jest szczególnie ważna postać układu równań różniczkowych cząstkowych typu Cauchy'ego. W przypadku liniowym, na problem rozwiązalności układu możemy odpowiedzieć metodami algebraicznymi. Badając taki układ mamy wiele aspektów dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązania, różniczkowalności rozważanych funkcji, lokalne i globalne własności rozwiązań. Niżej równania różniczkowe cząstkowe będziemy krótko oznaczali przez PDEs (ang. partial differential equations).

**Układy PDEs typu Caychy'ego w $\mathbb{R}^n$.** Wprowadzimy tutaj podstawowe pojęcia teorii układów równań różniczkowych cząstkowych typu Cauchy'ego. Ograniczymy się do lokalnej teorii.

Przyjmiemy wypukłość obszaru $D \subset R^n$ ze współrzędnymi $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ i funkcje $F_i^A(x, y)$, $i = 1, \dots, n$; $A = 1, \dots, N$, na $\tilde{D} \subset D \times R^N$. Załóżmy, że funkcje $F_i^A(x, y)$ są ciągłe względem $x$ i różniczkowalne względem $y$ w obszarze $\tilde{D}$.

Układ *równań różniczkowych cząstkowych typu Cauchy'ego* ma postać

$$\partial_i y^A(x) = F_i^A(x, y(x)), \qquad A = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

gdzie $y(x) = (y^1(x), \dots, y^N(x))$ są niewiadomymi funkcjami, $\partial_i = \partial/\partial x^i$.

Dla *danych początkowych* ($\equiv$ *warunki początkowe Cauchy'ego*)

$$y^A(x_0) \; = \; y_0^A, \quad A = 1, \dots, N, \tag{4}$$

gdzie $x_0 \in D_i(x_0, y_0^A) \in \tilde{D}$, układ (3) ma co najwyżej jedno rozwiązanie

$$y^A = y^A(x^1, \dots, x^n) \tag{5}$$

w klasie $C^1$ takie, że $(x, y(x)) \in \tilde{D}$. Z tego powodu ogólne rozwiązanie układu (3) zależy od $r \leq N$ parametrów rzeczywistych.

Załóżmy, że $F_i^A(x, y) \in C^1(\tilde{D})$ i poszukujemy rozwiązania spełniającego $y^A(x) \in C^2(D)$. Wtedy warunki całkowalności (3) mają postać $\partial_{jk} y^A(x) = \partial_{kj} y^A(x)$. Jeśli zastosujemy je do (3), to otrzymamy warunki całkowalności układu (3):

$$\partial_k F_j^A + F_k^B \cdot \partial F_j^A / \partial y^B - \partial_j F_k^A - F_j^B \cdot \partial F_k^A / \partial y^B = 0. \tag{6}$$

Dla każdego rozwiązania (5) układu (3), warunki (6) są spełnione tożsamościowo dla $x \in D$. Wśród innych te warunki muszą być spłnione dla danych początkowych (4).

Jeżeli warunki (6) są tożsamościowo spełnione dla $x \in D$, wtedy układ (3) nazywany zupełnie całkowalnym. W tym przypadku układ ma rozwiązanie dla każdych danych początkowych (4), to znaczy, że ogólne rozwiązanie (5) zależy od $N$ parametrów rzeczywistych.

**Mieszane układy PDEs typu Caychy'ego w $\mathbb{R}^n$.**

Załóżmy, że funkcje $y^A(x)$ spełniają, oprócz (3), także dodatkowe równania

$$f^p(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^N) = 0, \quad p = 1, \dots, m. \tag{7}$$

Funkcje $f^p(x, y)$ są określone w obszarze $\tilde{D}$.

Układ (3) i (7) nazywany *mieszanym układem PDEs typu Cauchy'eqo.* Jeżeli studiujemy taki układ, to równocześnie badamy warunki całkowalności (6) i (7) i oznaczamy je w skrócie przez $(B)$.

Niech $F_i^A(x,y) \in C^{r+2}(\tilde{D})$ i $f^p(x,y) \in C^{r+1}(\tilde{D})$. Wtedy rózniczkując krok po kroku otrzymujemy ciąg różniczkowych przedłużeń $(B_1)$, $(B_2), \ldots, (B_r)$. Oznaczmy $(B_0) \equiv (B)$. Teraz $(B_{k+1})$ otrzymujemy z układu warunków $(B_k)$ za pomocą różniczkowania wszystkich równań przez $\partial_i$, $i = 1, \ldots, n$. Warunki $(B_0)$, $(B_1), \ldots, (B_n)$ muszą być spełnione dla danych początkowych (4).

Możemy udowodnić następujące twierdzenie (Eisenhart [22], Finnikov [27], Rashevskij [76], Sinyukov [82] – tutaj twierdzenie jest formułowane dla rozwiązań analitycznych).

**Twierdzenie 1.** *W otoczeniu punktu $x_0 = (x_0^i)$, mieszany układ PDEs (3) i (7) typu Cauchy'ego posiada jedyne rozwiązanie (5) klasy $C^{r+1}$, które spełnia warunki początkowe (4) wtedy i tylko wtedy, gdy warunki $(B_0)$, $(B_1), \ldots, (B_r)$ są spełnione w punkcie $(x_0, y_0)$, i $r$ jest najmniejszą liczbą, dla której $(B_{r+1})$ jest wynikiem układu wszystkich poprzedzających przedłużeń.*

Podstawowe badanie (3) polega na sprawdzeniu warunków całkowalności, które zasadniczo są algebraicznymi równaniami dla nieznanych zmiennych $y^A$. W przypadku, gdy są one tożsamościowo spełnione mamy $r = N$.

**Mieszany liniowy układ PDEs typu Cauchy'ego w $\mathbb{R}^n$.** Wspomniane w poprzedniej części układy są szczególnie ważne w przypadku, gdy są one liniowe. W tym przypadku równania (3) i warunki (6) mają postać

$$(a)\ \ \partial_i y^A(x) = F_{iB}^A(x) \cdot y^B(x) + F_i^A(x) \quad \text{i} \quad (b)\ \ f_B^p(x) \cdot y^B + f^p(x) = 0, \tag{8}$$

gdzie $F_{iB}^A(x)$, $F_i^A(x)$, $f_B^p(x)$, $f^p(x)$ są funkcjami na $D$.

Warunki całkowalności (8a) są algebraicznymi liniowymi równaniami względem $y^A$ i mają postać równań (8b). Oczywiście, Twierdzenie 1 jest spełnione, w konsekwencji, problem rozwiązalności układu liniowego (8) może być rozstrzygnięty przez analizę algebraicznych równań liniowych.

**Mieszany PDEs w postaci tensorowej.** W zastosowaniach teorii PDEs równania (3) i (7) są często zapisywane w postaci tensorowej.

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie dziedziną współrzędnych $A_n$ z koneksją liniową $\nabla$. Układ PDEs typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych (względem koneksji afinicznej $\nabla$) $m$ nieznanych pól tensorowych $\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \cdots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \cdots j_{q_\sigma}}(x)$, $\sigma = 1, \ldots, m$, typu $(p_\sigma, q_\sigma)$ przyjmuje postać

$$\begin{gathered}\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \cdots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \cdots j_{q_\sigma}, k}(x) = \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \cdots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \cdots j_{q_\sigma} k}(x, \underset{1}{Y}, \ldots, \underset{m}{Y}), \\ i_1, i_2, \ldots, i_{p_\sigma}, j_1, j_2, \ldots, j_{q_\sigma}, k = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{9}$$

Po prawej stronie układu (9) są funkcje tensorowe typu $(p_\sigma, q_\sigma)$ zbudowane w określony sposób za pomocą skończonej liczby operacji tensorowych dla nieznanych pól tensorowych $\underset{\sigma}{Y}$ i także dla pól pewnych znanych obiektów łącznie z koneksją liniową $\nabla$. Warunki całkowalności układu (9) wynikają z tożsamości Ricci'ego dla tensora $\underset{\sigma}{Y}$, który wynika z warunków (6):

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1\cdots i_{p_\sigma}}_{j_1\cdots j_{q_\sigma},[lm]} &\equiv \underset{\sigma}{Y}{}^{\alpha i_2\cdots i_{p_\sigma}}_{j_1\cdots j_{q_\sigma}} R^{i_1}_{\alpha lm} + \cdots + \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1\cdots i_{p_\sigma-1}\alpha}_{j_1\cdots j_{q_\sigma}} R^{i_{p_\sigma}}_{\alpha lm} \\ &- \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1\cdots i_{p_\sigma}}_{\alpha j_2\cdots j_{q_\sigma}} R^{\alpha}_{j_1 lm} - \cdots - \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1\cdots i_{p_\sigma}}_{j_1\cdots j_{q_\sigma-1}\alpha} R^{\alpha}_{j_{q_\sigma} lm} - \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1\ldots i_{p_\sigma}}_{j_1\ldots j_{q_\sigma},\alpha} S^{\alpha}_{lm} \\ &= \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2\cdots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2\cdots j_{q_\sigma} l,m} - \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2\cdots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2\cdots j_{q_\sigma} m,l}, \end{aligned}$$

gdzie $R^h_{ijk}$ są współrzędnymi tensora krzywizny i "," oznacza pochodną kowariantną na $A_n$. Stąd warunki całkowalności są zapisane w postaci tensorowej.

**Zastosowania tych układów.** Wiele problemów geometrii różniczkowej było pomyślnie rozwiązanych za pomocą jednorodnych układów liniowych równań różniczkowych typu Cauchy'ego dla przykładu:

- izometryczne i homotetyczne transformacje przestrzeni Riemanna,
- afiniczne i rzutowe transformacje przestrzeni Riemanna i rozmaitości z koneksją afiniczną,
- holomorficznie rzutowe transformacje przestrzeni Kählera,
- afiniczne odwzorowania przestrzeni Riemanna i rozmaitości z koneksją afiniczną.

Powyższe rezultaty były osiągnięte w latach 1900 – 1960 i prezentowane w wielu monografiach i pracach naukowych takich jak: Aminova [1–3], É. Cartan [9], do Carmo [6], I.P. Egorov [19,20], Eisenhart [22,23], Fecko [26], Fubini [31], Helgason [33], Kobayashi, Nomizu [45], Mikeš [64,65], Mikeš, Vanžurová, Hinterleitner [59], Norden [67], Penrose, Rindler [71], Petrov [73,74], Radulović, Mikeš, Gavrilchenko [75], Rashevskij [76], Rund [78], Schouten, Struik [79], Sinyukov [82,83], K. Yano [95], K. Yano, Bochner [96] i innych.

Niżej przedstawimy nowe wyniki otrzymane w ostatnich 40 latach i związanych z układami typu Cauchy'ego. To oznacza, że dla wspomnianych typów geometrycznych problemów, regularne metody rozwiązań znaleziono dla problemów takich jak:

- geodezyjne odwzorowania przestrzeni Riemanna (Sinyukov [81,82], 1966),
- geodezyjne odwzorowania rozmaitości z koneksją afiniczną (rzutową) na przestrzenie Riemanna (Berezovsky i Mikeš [P1], 1989, patrz [P16], [P17], [64]; Hinterleitner, Mikeš [36,37,56], 2008; *Uwaga*: wynik Eastwooda i V.M. Matveeva [18] wynika z wcześniej wspomnianych rezultatów È. Cartana [7] i J.M. Thomasa [87], wykorzystujących normalną koneksję, patrz [21, s. 105].
- geodezyjne odwzorowania rozmaitości Kählera (Mikeš, 1979-2002, patrz [64]) (Mikeš, 1979–2002, patrz [64]),
- geodezyjne odwzorowania hiperbolicznych i parabolicznych rozmaitości Kählera (Mikeš, Shiha, Starko, etc., 1989–2002, patrz [64]),
- geodezyjne odwzorowania słabych przestrzeni Berwalda i przestrzeni Berwalda na przestrzenie Riemanna (Mikeš, Bácsó, Berezovski [P15], 2008),
- geodezyjne deformacje hiperpowierzchni Riemanna w przestrzeniach Riemanna (Gavrilchenko, Mikeš, etc. [32,53,75], 1997),
- konformne odwzorowania przestrzeni Riemanna na przestrzenie Einsteina (Gavrilchenko, Gladysheva i Mikeš [55], 1992, patrz [65]),
- holomorficznie rzutowe odwzorowanie przestrzeni Kählera (Domashev i Mikeš [17,50], 1976, 1980, patrz [65,82]),
- holomorficznie rzutowe odwzorowania na przestrzenie Kählera (Chodorová (Škodová), Mikeš i Pokorná [84], 2005),
- holomorficznie rzutowe odwzorowania hiperbolicznych przestrzeni Kählera (Kurbatova [46], 1980, patrz [65]),
- holomorficznie rzutowe odwzorowania parabolicznych przestrzeni Kählera (Shiha, 1992, patrz [10,65,72]),
- prawie geodezyjne odwzorowania typu $\pi_1$ (Berezovsky, Mikeš, Vanžurová [H1]),
- prawie geodezyjne odwzorowania typu $\pi_2$ (Vavříková, Mikeš, etc. [89]),
- $F$-planarne odwzorowania rozmaitości z koneksją afiniczną na przestrzenie Riemanna (J. Mikeš [52], 1994, 1999, patrz [65]),
- infinitezymalne F-planarne transformacje rozmaitości z koneksją afiniczną na przestrzenie Riemanna (Hinterleitner, Mikeš, Stránská [42], 2008).

Wyniki wspomniane wyżej są szczegółowo opisane w monografii [P17], której byłem jednym ze współautorów.

W konkluzji pokazujemy zastosowania wyżej podanej teorii PDEs, które były wprowadzone w pracach:

- w [H1] otrzymaliśmy podstawowe typu Cauchy'ego PDEs kanonicznych prawie geodezyjnych odwzorowań typu $\pi_1$ na przestrzenie Riemanna i uogólnione Ricci-symetryczne przestrzenie,
- w [H2] otrzymaliśmy podstawowe typu Cauchy'ego PDEs dla specjalnych pierwszego typu prawie geodezyjnych odwzorowań $\pi_1$ przestrzeni z koneksją afiniczną zachowających pewien tensor,
- w [H3] otrzymaliśmy podstawowe typu Cauchy'ego PDEs dla konforemnych odwzorowań przestrzeni Riemanna na Ricci-symetrzyczne przestrzenie,
- w [H4] otrzymaliśmy podstawowe typu Cauchy'ego PDEs dla geodezyjnych odwzorowań rozmaitości z koneksją afiniczną na rozmaitości Ricci-symetryczne.

W następnej części przedstawimy te wyniki szczegółowo.

### 2.2. Podstawowy typu Cauchy'ego układ PDEs kanonicznych prawie geodezyjnych odwzorowań typu $\pi_1$ na przestrzenie Riemanna i uogólnione Ricci-symetryczne przestrzenie. [H1].

Niech $M$, $\nabla$ i $g$ będą rozmaitością, koneksją afiniczną i metryką. Udowodniliśmy następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 2.** *Rozmaitość $A_n = (M, \nabla)$ dopuszcza $\tilde{\pi}_1$-odwzorowania (tzn. kanoniczne prawie geodezyjne odwzorowania typu $\pi_1$) na przestrzeń (pseudo-) Riemanna $V_n = (M, g)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie mieszanego układu typu Cauchy'ego dla $1/2\, n^2(n^2-1)+n(n+1)^2+1$ niewiadomych funkcji.*

**Twierdzenie 3.** *Rozmaitość $A_n = (M, \nabla)$ dopuszcza $\tilde{\pi}_1$-odwzorowania (tzn. kanoniczne prawie geodezyjne odwzorowania typu $\pi_1$) na uogólnioną Ricci symetryczną rozmaitość $\bar{A}_n = (M, \bar{\nabla})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie mieszanego układu typu Cauchy'ego dla $1/6\, n(n+1)(2n^3 - 4n^2 + 5n + 3)$ niewiadomych funkcji.*

Rozmaitość nazywamy uogólnioną *Ricci symetryczną rozmaitością*, gdy jej tensor Ricci'ego spełnia warunek $\nabla Ric(Y, Z; X) + \nabla Ric(X, Z; Y) = 0$.

Te twierdzenia wzmacniają twierdzenie Sinyukova [83], gdzie docelową przestrzenią jest Ricci symmetryczna przestrzeń (pseudo-) Riemanna.

### 2.3. Podstawowy układ PDEs typu Cauchy'ego dla specjalnych pierwszego typu prawie geodezyjnych odwzorowań $\pi_1$ przestrzeni z koneksją afiniczną zachowujących pewien tensor. [H2].

Załóżmy, że odwzorowanie przestrzeni z koneksją afiniczną $A_n$ i $\bar{A}_n$ spełnia warunek

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij} P^h_{k\alpha} + a_{(ij}\delta^h_{k)}. \qquad (10)$$

Takie odwzorowania są szczególnym przypadkiem prawie geodezyjnych odwzorowań pierwszego typu. Otrzymujemy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 4.** *Tensor $R^h_{(ij)k}$ jest niezmiennikiem prawie geodezyjnych odwzorowań przestrzeni z koneksją afiniczną, które spełniają warunki (10).*

Ponieważ tensor Riemanna przestrzeni afinicznych znika, otrzymujemy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 5.** *Jeżeli przestrzeń afiniczna dopuszcza prawie geodezyjne odwzorowania spełniające warunki (10) na przestrzeń z koneksją $\bar{A}_n$, wtedy $\bar{A}_n$ jest również przestrzenią afiniczną.*

Tak więc klasa przestrzeni afinicznych jest zamknięta względem prawie geodezyjnych odwzorowań spełniających warunek (10).
Z warunków całkowalności (10) otrzymujemy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.** *Przestrzeń z koneksją afiniczną $A_n$ dopuszcza prawie geodezyjne odwzorowanie spełniające warunki (10) na przestrzeń $\bar{A}_n$ z koneksją afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie mieszanego układu PDEs typu Cauchy'ego w pochodnej kowariantnej (10) i*

$$a_{ij,k} = \frac{1}{(n-1)(n+2)} \Big[n \cdot (P^\alpha_{ik} R_{\alpha j} - P^\alpha_{\beta(i} R^\beta_{k)j\alpha}) + R_{\alpha(k} P^\alpha_{i)j} - P^\alpha_{\beta j} R^\beta_{(ik)\alpha} -$$
$$- P^\alpha_{\beta i} R^\beta_{jk\alpha} - P^\alpha_{\beta k} R^\beta_{ji\alpha} + (n+1) \cdot (a_{j(i} P^\alpha_{k)\alpha} - a_{\alpha(i} P^\alpha_{k)j}) + 2\,(a_{ik} P^\alpha_{j\alpha} - a_{j\alpha} P^\alpha_{ik})\Big].$$

*względem nieznanych funkcji $P^h_{ij}$ i $a_{ij}$ w tej przestrzeni.*

Z własności tego układu wynika, że liczba istotnych parametrów, od których zależy ogólne rozwiązanie takiego układu jest co najwyżej $r \leq 1/2\ n(n+1)^2$.

W konkluzji rozważmy równania (10) w przypadku, gdy tensor $a_{ij}$ tożsamościowo znika. W tym przypadku (10) przyjmuje prostszą postać

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k}. \tag{11}$$

Warunki całkowaności równań (11) w przestrzeni afinicznej mają postać
$P^\alpha_{ij} R^h_{\alpha km} + P^h_{\alpha(i} R^\alpha_{j)km} = 0$, równania (11) są zupłnie całkowalne. Dlatego równania (11) w przestrzeni afinicznej mają rozwiązanie dla każdych wartości początkowych tensora deformacji $P^h_{ij}(x_0)$.

Jeżeli wartości początkowe są takie, że $P^h_{ij}(x_0) \not\equiv \delta^h_{(i}\psi_{j)}(x_0)$, wtedy w taki sposób skonstruowane rozwiązanie określa prawie geodezyjne odwzorowanie pierwszego typu przestrzeni afinicznej $A_n$ na przestrzeń afiniczną $A_n$, i nie jest to odwzorowanie geodezyjne. Stąd następujące stwierdzenie jest uzasadnione.

**Twierdzenie 7.** *Istnieje prawie geodezyjne pierwszego typu odwzorowanie na siebie przestrzeni afinicznej, które spełnia warunki (11). Wszystkie linie proste przechodzą w krzywe płaskie.*

Na zakończenie damy prosty przykład prawie geodezyjnego pierwszego typu odwzorowania przestrzeni afinicznej $A_n$ na afiniczną przestrzeń $\bar{A}_n$, spełniającego warunek (11).

Niech $x^1, x^2, \ldots, x^n$ i $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ będą afinicznymi współrzędnymi odpowiednio w $A_n$ i $\bar{A}_n$. Punktowe odwzorowanie

$$\bar{x}^h = \frac{1}{2}\, c^h_\alpha\, (x^\alpha - c^\alpha)^2 + x^h_\circ,$$

gdzie $c^h_i$, $c^h$ i $x^h_\circ$ są stałymi takimi, że $x^h \neq c^h$ i $\det|c^h_i| \neq 0$, określa prawie geodezyjne odwzorowanie pierwszego typu od $A_n$ do $\bar{A}_n$.

Prosta weryfikacja pokazuje, że niezerowymi składowymi tensora deformacji $P^h_{ij}$ koneksji we współrzędnych $x^1, x^2, \ldots, x^n$ są $P^h_{hh} = 1/(x^h - c^h)$, $h = 1, 2, \ldots, n$. Rozwiązanie to spełnia równania (11). Łatwo pokazać, że jeżeli tensor deformacji ma taką strukturę, to odwzorowanie nie jest ani typu $\pi_2$ ani typu $\pi_3$.

Takie odwzorowanie przekształca linie proste w $A_n$, które, jak wiemy, są określone równaniami postaci $x^h = a^h + b^h\, t$, gdzie $t$ jest parametrem, na parabole w $\bar{A}_n$, które są określone równaniami postaci

$$\bar{x}^h = D^h + E^h\, t + F^h\, t^2,$$

gdzie $D^h = 1/2\; c^h_\alpha\, (a^\alpha - c^\alpha)^2$, $E^h = c^h_\alpha\, (a^\alpha - c^\alpha)\, b^\alpha$ i $F^h = 1/2\; c^h_\alpha\, (b^\alpha)^2$.

Jedynym wyjątkiem są linie, dla których wektory $E^h$ i $F^h$ są kolinearne. Wtedy są one liniami prostymi. Na zakończenie odnotujmy, że relacje (11) generują rodzinę prawie geodezyjnych transformacji typu $\pi_1$ przestrzeni płaskich pod warunkiem, że współczynniki $c^h_i$, $c^h$ i $x^h_\circ$ są parametrami ciągłymi.

### 2.4. **Podstawowy układ PDEs typu Cauchy'ego dla konforemnych odwzorowań przestrzeni Riemanna na Ricci-symetryczne przestrzenie.** [H3].

Odwzorowania konforemne $n$-wymiarowych przestrzeni Riemanna $V_n$ były rozważane przez wielu autorów. Znalazły one zastosowania w ogólnej teorii względności (patrz np. [5, 13, 23, 55, 59, 73, 96]). Niżej założymy, że sygnatura metryki na rozważanych przestrzeniach $V_n$ będzie dowolna, to jest każda $V_n$ może być właściwą przestrzenią Riemanna lub przestrzenią pseudo-Riemanna.

Brinkmann redukuje pytanie czy przestrzeń Riemanna $V_n$, $n \geq 3$, może być odwzorowana konforemnie na przestrzenie Einsteina $\bar{V}_n$ do problemu rozwiązalności nieliniowego układu równań różniczkowych typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych dla $n+1$ nieznanych funkcji [5]. Ten problem w detalach był rozważany przez Petrova w jego monografii [73].

W [55] (patrz także [59, 65] i [P17]), podstawowe równania odwzorowań były zredukowane do liniowego układu równań różniczkowych typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych, dla których można dokonać oszacowania liczby $r$ dowolnych parametrów określąjących ogólne rozwiązanie problemu. Innymi słowy, stopień mobilności przestrzeni Riemanna względem konforemnych odwzorowań na przestrzenie Einsteina został znaleziony.

W [25], pierwsza luka w dystrybucji stopnia mobilności przestrzeni Riemanna względem odwzorowań konforemnych na przestrzenie Einsteina była oszacowana. Jak wiadomo, [55], przestrzenie z maksymalnym stopniem mobilności $r = n + 2$ są dokładnie przestrzeniami konforemnie płaskimi. Otrzymano tensor charakteryzujący niekonforemnie płaskie przestrzenie Riemanna, dla których $r = n - 1$. W ten sposób otrzymano ostre granice dla pierwszej luki w dystrybucji stopnia mobilności przestrzeni Riemanna względem odwzorowań konforemnych na przestrzenie Einsteina i zostały opisane maksymalnie mobilne niekonforemnie płaskie przestrzenie Riemanna z danym stopniem mobilności.

W tych badaniach, geometryczne obiekty były rozważane przy założeniu dostatecznego stopnia gładkości. W [24] były badane minimalne warunki na różniczkowalność geometrycznych obiektów konforemnych odwzorowań przestrzeni Riemanna $V_n$ na przestrzenie Einsteina. Układ równań określający te odwzorowania był znaleziony w postaci zamkniętego liniowego układu typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych z minimalnymi żądaniami na różniczkowalność metryk rozważanych konforemnie zgodnych przestrzeni.

W [24] rozważamy konforemne odwzorowania przestrzeni Riemanna $V_n$ na Ricci symetryczne przestrzenie Riemanna. Zauważmy, że Ricci symetryczne przestrzenie charakteryzują się kowariantnie stałym tensorem Riecci'ego, przez to są one naturalnym uogólnieniem przestrzeni Einsteina. To otwiera nowy kierunek rozwoju dla problemu odwzorowań konforemnych na przestrzenie Einsteina.

Na zakończenie wprowadzenia przypomnijmy, że geodezyjne odwzorowania przestrzeni Einsteina i Ricci symetrycznych były studiowane przez Mikeša w [43, 60, 61], patrz też [59, 64] i [H17].

W [H3] otrzymaliśmy podstawowe równania problemu konforemnych odwzorowań na Ricci symetryczne przestrzenie w postaci zamkniętegu układu typu Cachy'ego w pochodnych kowariantnych. Określamy liczbę istotnych parametrów, od których zależy ogólne rozwiązanie tego (nieliniowego) układu.

Rozważmy odwzorowanie $f$ przestrzeni Riemanna $V_n$ z tensorem metrycznym $g$ na przestrzeń Riemanna $\bar{V}_n$ z tensorem metrycznym $\bar{g}$. Załóżmy, że przestrzenie Riemanna $V_n$ i $\bar{V}_n$ są wyposażone w układ współrzędnych $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ wspólny z odwzorowaniem. Zakładamy, że $n > 2$ i rozważane funkcje są dostatecznie gładkie.

Mówimy, że odwzorowanie $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ jest *konforemne* gdy we spółrzędnych $x$ tensory metryczne $g$ i $\bar{g}$ są proporcjonalne i ich współrzędne spełniają warunek

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\,\psi(x)}\, g_{ij}(x),$$

gdzie $\psi(x)$ jest funkcją.

Z powyższego warunku wynika, że odwzorowania konforemne zachowują kąt między wektorami stycznymi do krzywych. Ta własność całkowicie charakteryzuje odwzorowania konforemne.

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 8.** *Przestrzeń Riemanna $V_n$ może być konforemnie odwzorowana na Ricci symetryczną przestrzeń Riemanna $\bar{V}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zamknięty typu Cauchy'ego układ równań w pochodnych kowariantnych*

$$\begin{aligned}
\psi_{,i} &= \psi_i, \\
\psi_{i,j} &= \frac{\mu}{n-2}\, g_{ij} + \psi_i\psi_j - \frac{1}{n-2}\,(\bar{R}_{ij} - R_{ij}), \\
\bar{R}_{ij,k} &= 2\psi_k\,\bar{R}_{ij} + \psi_i\,\bar{R}_{jk} + \psi_j\,\bar{R}_{ik} - \psi^\alpha \bar{R}_{i\alpha} g_{jk} - \psi^\alpha \bar{R}_{j\alpha} g_{ik}, \\
(n-1)\,\mu_{,k} &= g^{\alpha\beta}\Big((n-2)\psi_\gamma R^\gamma_{\beta k\alpha} + (n-1)\,\psi_\beta \bar{R}_{\alpha k} - \psi_\beta R_{\alpha k}\Big) + \\
&\qquad (R + (n-1)\cdot\mu)\cdot\psi_k - 1/2\,R_{,k}
\end{aligned}$$

*jest rozwiązalny w $V_n$ względem nieznanych funkcji $\psi(x)$, $\psi_i(x)$, $\mu(x)$ i $\bar{R}_{ij}(x)$ $(= \bar{R}_{ji}(x))$.*

Stąd ogólne rozwiązanie układu równań różniczkowych, podanego wyżej, zależy od $(1/2)\,n(n+1) + n + 2$ wartości początkowych niewiadomych funkcji w punkcie $x_0$, mianowicie od $\psi(x_0)$, $\psi_i(x_0)$, $\mu(x_0)$ i $\bar{R}_{ij}(x_0)$ $(= \bar{R}_{ji}(x_0))$, które ogólnie mogą zależeć od siebie.

### 2.5. **Podstawowe typu Cauchy'ego PDEs dla geodezyjnych odwzorowań na Ricci symetryczne przestrzenie.** [H4].

Praca [H4] jest poświęcona dalszemu rozwojowi teorii geodezyjnych odwzorowań rozmaitości z koneksją afiniczną. Ta teoria jest inspirowana pracą Levi-Civity [48], gdzie postawił on i rozwiązał w specjalnym układzie wspólrzędnych problem znalezienia metryk Riemanna ze wspólnymi geodezyjnymi. Odnotujmy, że było to połączone z badaniem dynamiki układów mechanicznych. Później teorię geodezyjnych odwzorowań rozwijali w swoich pracach Thomas, Weyl, Cartan, Shirokov, Solodovnikov, Petrov, Sinyukov, Prvanović, Mikeš, patrz [21, 23, 59, 64, 73, 75, 82].

Geodezyjne odwzorowania odgrywają fundamentalną rolę w teoretycznej mechanice i fizyce, szczególnie w ogólnej teorii względności [48, 73, 74] i także w podstawach geometrii specjalnych liniowych struktur [57].

Geodezyjne odwzorowania bardziej ogólnych klas rozmaitości (Finslera i uogólnione Einsteina) były studiowane w pracach [66,97,98,100]. Odwzorowania geodezyjne i rzutowe transformacje przestrzeni symetrycznych, rekurentnych, Ricci symetrycznych, półsymetrycznych, Einsteina i ich uogólnień były studiowane w [11,12,16,28–30,35,51,59–64,68,69,73,75,82,83].

W latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku Sinyukov [80] badał geodezyjne odwzorowania equiafinicznych symetrycznych rozmaitości z koneksją afiniczną na przestrzenie (pseudo-) Riemanna. Udowodnił, że te przestrzenie (pseudo-) Riemanna muszą mieć stałą krzywiznę. To jest także prawdziwe dla rekurentnych rozmaitości. Ten wynik był wielokrotnie powtarzany, patrz [59,64,82].

Mikeš [51,62–64] rozwinął rezultaty otrzymane przez Sinyukova. Wyżej wspomniane rezultaty są także prawdziwe dla uogólnionych rekurentnych przestrzeni. W pracy [35] Hinterleitner i Mikeš udowodnili, że obrazami tych odwzorowań mogą być rozmaitości Weyla. Podobne wyniki są także prawdziwe dla geodezyjnych odwzorowań nieeinsteinowskich Ricci symetrycznych przestrzeni na przestrzenie (pseudo-) Riemanna [61]. Zauważmy, że geodezyjne odwzorowania przestrzeni Einsteina były studiowane przez Mikeša [60] i innych, patrz [37,59]. Sinyukov [81,82], podczas studiowania geodezyjnych odwzorowań między przestrzeniami (pseudo-) Riemanna znalazł, że ogólne rozwiązanie zależy od skończonej liczby rzeczywistych parametrów. Taki wynik otrzymał także dla odwzorowań geodezyjnych rozmaitości z koneksją afiniczną na przestrzenie (pseudo-) Riemanna [P1] i także dla przypadku geodezyjnych odwzorowań uogólnionych przestrzeni Finslera na przestrzeń (pseudo-) Riemanna [P9].

W podanych badaniach najważniejsze równania odwzorowań geodezyjnych rozmaitości $A_n$ z koneksją afiniczną na Ricci symetryczną rozmaitość $\bar{A}_n$ były otrzymane w postaci układu równań różniczkowych cząstkowych typu Cauchy'ego. Warunki ich całkowalności zostały znalezione. Liczba niezależnych parametrów rzeczywistych wpływających na ogólne rozwiązanie tego układu została znaleziona. Ostatecznie otrzymujemy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 9.** *Rozmaitość $A_n$ z koneksją afiniczną dopuszcza geodezyjne odwzorowanie na Ricci symetryczną rozmaitość $\bar{A}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w $A_n$ istnieje rozwiązanie zamkniętego układu równań typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych*

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij,m} &= 2\psi_m \bar{R}_{ij} + \psi_i \bar{R}_{mj} + \psi_j \bar{R}_{im}, \\ \psi_{i,j} &= \frac{1}{n^2-1}\left[n\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji} - (nR_{ij} + R_{ji})\right] + \psi_i\psi_j \end{aligned}$$

*względem funkcji niewiadomych $\bar{R}_{ij}(x)$ i $\psi_i(x)$.*

Ogólne rozwiązanie tego układu równań zależy od nie więcej niż $n(n+1)$ niezależnych parametrów.

Jest oczywiste, że ten układ nie jest liniowy względem niewiadomych funkcji $\bar{R}_{ij}(x)$ i $\psi_i(x)$. Otrzymaliśmy ich warunki całkowalności. Tak więc, warunki całkowalności odwzorowań geodezyjnych rozmaitości $A_n$ z koneksją afiniczną na equiafiniczną ($\bar{R}_{ij} = \bar{R}_{ji}$) symetryczną rozmaitość $\bar{A}_n$ będą liniowe względem nieznanych funkcji $\bar{R}_{ij}(x)$ i $\psi_i(x)$.

Rozmaitość $\bar{A}_n$ z koneksją afiniczną $\bar{\nabla}$ nazywamy (lokalnie) *symetryczną* jeżeli jej tensor Riemanna jest kowariantnie stały (É. Cartan [7]).

Dlatego symetryczne rozmanitości $\bar{A}_n$ są charakteryzowane przez warunek

$$\bar{R}^h_{ijk|m} = 0.$$

Jest oczywiste, że symetryczne rozmaitości są jednocześnie rozmaitościami Ricci symetrycznymi. Z drugiej strony, symetryczne rozmaitości są półsymetryczne. W 1950 r. takie przestrzenie były wprowadzone przez Sinyukova [80], są one charakteryzowane przez następujący warunek

$$\bar{R}^h_{ijk|lm} - \bar{R}^h_{ijk|ml} = 0.$$

Odwzorowania geodezyjne półsymetrycznych przestrzeni były studiowane przez Sinyukova [80, 82] i Mikeša [51, 59, 61–64, 82], patrz [59, 82] i [P17]. Były one badane także przez R. Deszcza [15].

Rozważmy odwzorowanie geodezyjne $f$ rozmanitości $A_n$ z koneksją afiniczną $\nabla$ na symetryczną rozmaitość $\bar{A}_n$ z koneksją $\bar{\nabla}$. Otrzymamy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 10.** *Rozmaitość $A_n$ z koneksją afiniczną dopuszcza odwzorowanie geodezyjne na symetryczną rozmaitość $\bar{A}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w $A_n$ istnieje rozwiązanie mieszanego układu równań typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych*

$$\begin{aligned}
\bar{R}^h_{ijk,m} &= 2\psi_m \bar{R}^h_{ijk} + \psi_i \bar{R}^h_{mjk} + \psi_j \bar{R}^h_{imk} + \psi_k \bar{R}^h_{ijm} - \delta^h_m \psi_\alpha \bar{R}^\alpha_{ijk}, \\
\psi_{i,j} &= \frac{1}{n^2-1}\left[n\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji} - (nR_{ij} + R_{ji})\right] + \psi_i\psi_j, \\
&\quad \bar{R}^h_{i(jk)}(x) = 0 \quad \textit{and} \quad \bar{R}^h_{(ijk)}(x) = 0
\end{aligned}$$

*względem niewiadomych funkcji $\bar{R}^h_{ijk}(x)$ i $\psi_i(x)$.*

Jest oczywiste, że ogólne rozwiązanie mieszanego zamkniętego układu równań typu Cauchy'ego zależy od nie więcej niż

$$\frac{1}{2}\, n^3(n-1) + n$$

niezależnych parametrów.

## 3. Inne dokonania naukowe i badawcze

### 3.1. Prace naukowe przed uzyskaniem stopnie doktora.

[P1] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, On the classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces, *Diff. Geom. and its Appl., Proc. Conf., Dubrovnik/Yugosl.* 1988, 41–48 (1989).

[P2] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, A new classification of almost geodesic mappings of spaces with affine connection, *Deposited at the Ukrainian Institute for scientific and Technical Information (UkrNIITI)* 08.05.1991, No. 653, Kiev (1991).

### 3.2. Prace naukowe po uzyskaniu stopnie doktora.

[P3] J. Mikeš, V.E. Berezovskii, Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces, Amsterdam: *North-Holland Publ. Comp. Colloq. Math. Soc. János Bolyai* 56, 491–494 (1992).

[P4] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces, *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Math.* 35, 21–24 (1996).

[P5] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, On almost geodesic mappings of the type $\pi_1$ of Riemannian spaces preserving a system $n$-orthogonal hypersurfaces, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, II. Ser., Suppl. 59, 103–108 (1999).

[P6] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, On special almost geodesic mappings of type $\pi_1$ of spaces with affine connection, *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Math.* 43, 21–26 (2004).

[P7] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, On a particular case of almost geodesic mappings of the first type, in: *Proc. Int. Geom. Semin. G.F. Laptev, Penza* 7–17 (2007).

[P8] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, A. Vanžurová, Canonical almost geodesic mappings of type $\pi_1$ onto pseudo-Riemannian manifolds, *Proc. 10th Int. Conf. DGA 2007, Olomouc, 2007.* Hackensack, NJ: World Sci. 65–75 (2008).

[P9] J. Mikeš, S. Báscó, V.E. Berezovskii, Geodesic mappings of weakly Berwald spaces and Berwald spaces onto Riemannian spaces, *Int. J. Pure Appl. Math.* 45, No. 3, 413–418 (2008).

[P10] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, Almost geodesic mappings of type $\pi_1$ onto generalized Ricci-symmetric spaces, *Uch. Zap. Kazan. Gos. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* 151, No. 4, 9–14 (2009).

[P11] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, A. Vanžurová, Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)* 26, No. 2, 221–230 (2010).

[P12] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, $(n-2)$-projective spaces of the first type, *Izv. Penz. Univ., Fiz.-Mat.* 26, 39–43 (2011).

[P13] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, A. Vanžurová, On a class of curvature preserving almost geodesic mappings of manifolds with affine connection, *J. Appl. Math.* 4, no. 2, 145–150 (2011).

[P14] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, On canonical almost geodesic mappings of the first type of affinely connected spaces, *Russ. Math.* 58, no. 2, 1–5 (2014); transl. from *Izv. vuzov, Mat.*, no. 2, 3–8 (2014).

[P15] V.E. Berezovskii, S. Bácsó, J. Mikeš, Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the Riemannian curvature, *Ann. Math. Inform.* 45, 3–10 (2015).

[P16] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, Almost geodesic mappings of spaces with affine connection, *J. Math. Sci. (New York)* 207, no. 3, 389–409 (2015).

[P17] J. Mikeš, V.E. Berezovskii et al., Differential geometry of special mappings, Olomouc: *Palacky Univ. Press*, 2015. 567 p.

[P18] J. Mikeš, V.E. Berezovskii, E. Stepanova, H. Chudá, Geodesic mappings and their generalizations. *J. Math. Sci. (New York)* 217, no. 5, 607–623 (2016).

[P19] I. Hinterleitner, V.E. Berezovskii, E. Chepurna, J. Mikeš, On the concircular vector fields of spaces with affine connection, *Acta Math. Acad. Paed.Nyíregyház.* 33, no. 1, 53–60 (2017).

[P20] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, H. Chudá, O.Y. Chepurna, On canonical almost geodesic mappings which preserve the Weyl projective tensor, *Russ. Math.* 61, no. 6, 1–5 (2017); transl. from Izv. vuzov (2017).

[P21] V.E. Berezovskii, M. Jukl, L. Juklová, Almost geodesic mappings of the fist type onto symmetric spaces, *Proc. Conf. APLIMAT 2017*, Bratislava, 126–131 (2017).
URL: http://www.proceedings.com/33721.html.

[P22] V.E. Berezovskii, J. Mikeš, P. Peška, Geodesic mappings of spaces with affine connection onto symmetric manifolds, *Proc. Int. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization*, pp. 99–104, Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, 2017.

[P23] Y. Cherevko, V.E. Berezovskii, O. Chepurna, Complex submanifolds of LCK-manifold, pseudo-Vaisman and Vaisman manifolds, *Proc. Conf. APLIMAT 2017*, Bratislava, 343–352 (2017).
URL: http://www.proceedings.com/33721.html.

[P24] V.E. Berezovskii, S. Bácsó S., J. Mikeš Diffeomorphism of affine connected spaces which preserved Riemannian and Ricci curvature tensors, *Miskolc Math. Notes.* 18, no. 1, 117–124 (2017).

[P25] V.E. Berezovskii, P. Peška, J. Mikeš, Geodesic and almost geodesic mappings onto Ricci symmetric spaces, *Mathematics, Information Technologies and Applied Sciences 2017. Post-conference proceedings, University of Defence, Brno, Czech Republic*, 2017. P. 43-49.

Opiszemy teraz podaną wyżej listę prac. Omówimy w szczególności najważniejsze wyniki, które osiągnęliśmy studiując dane zagadnienia.

3.3. **O odwzorowaniach geodezyjnych.** Ważna część teorii geodezyjnych odwzorowań (GM) dotyczy przypadków, gdy jedna z rozmaitości jest riemannowską, t.j. klasyczną (dodatnio określoną) przestrzenią Riemanna, możliwe też rozmaitością pseudo-Riemanna. Zauważmy też, że problem geodezyjnych odwzorowań na przestrzenie Riemanna jest równoważny z metryzowalnością lub rzutową metryzowalnością (rzutowej) koneksji, patrz [18].

Dla geodezyjnych odwzorowań między klasycznymi rozmaitościami Riemanna, podstawowe równania Levi-Civita znalazł w innej równoważnej postaci. Jednakże te równania są zachowane w ogólniejszym przypadku, gdy rozmaitość z koneksją afiniczną $A_n$ jest geodezyjnie odwzorowywana na rozmaitość Riemanna $\bar{V}_n$. Załóżmy, że $\bar{V}_n$ jest (klasyczną) przestrzenią Riemanna lub pseudo-Riemanna.

Zauważmy, że równania Levi-Civity nie są równaniami typu Cauchy'ego. Sinyukov rozpoczął badania następującego problemu: *znaleźć wszystkie przestrzenie Riemanna $\bar{V}_n$, które dopuszczają geodezyjne odwzorowania na z góry określoną przestrzeń Riemanna $V_n$*, patrz [64, 82].

To oznacza, że musimy znaleźć wszystkie tensory metryczne $\bar{g}$, które są rozwiązaniami równań Levi-Civity (1). Równania te są nieliniowe względem współrzędnych tensora metrycznego $\bar{g}$ i dla ich rozwiązania nie istnieją standardowe metody. Sinyukov (patrz [64, 82]) otrzymał dla tego problemu układ równań liniowych typu Cauchy'ego.

Otrzymujemy następujące twierdzenia:

**Twierdzenie 11.** (Mikeš, Berezovski [P3]) *Rozmaitość $A_n$ z koneksją afiniczną dopuszcza geodezyjne odwzorowanie na rozmaitość Riemanna $\bar{V}_n$ z tensorem metrycznym $\bar{g}_{ij}(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy następujący układ równań różniczkowych typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych*

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(a)} & \bar{g}_{ij,k} & = & 2\psi_k\bar{g}_{ij} + \psi_{(i}\bar{g}_{j)k};\\
\text{(b)} & n\psi_{i,j} & = & n\psi_i\psi_j + \mu\bar{g}_{ij} + R_{ij} + \bar{g}_{i\alpha}\bar{g}^{\beta\gamma}R^{\alpha}_{\beta\gamma j} - \frac{2}{n+1}R^{\alpha}_{\alpha ij};\\
\text{(c)} & (n-1)\mu_{,i} & = & 2(n-1)\psi_\alpha\bar{g}^{\beta\gamma}R^{\alpha}_{\beta\gamma i}-\\
& \multicolumn{3}{l}{-\psi_\alpha\bar{g}^{\alpha\beta}(5R_{\beta i}-\frac{6}{n+1}R^{\gamma}_{\gamma\beta i} - R_{i\beta}) + \bar{g}^{\alpha\beta}(R^{\gamma}_{\alpha\beta i,\gamma} + R_{\alpha i,\beta} - \frac{2}{n+1}R^{\gamma}_{\gamma\alpha i,\beta}).}
\end{array}$$

*posiada rozwiązanie względem symetrycznego tensora $\bar{g}_{ij}(x)$ $(\det(\bar{g}_{ij}(x)) \neq 0)$, kowektora $\psi_i(x)$ i funkcji $\mu(x)$, przecinek "," oznacza pochodną kowariantną* *względem koneksji w* $A_n$, $\bar g^{ij}(x)$ *są współrzędnymi tensora odwrotnego do* $(\bar g_{ij}(x))$ *zaś* $R^h_{ijk}$ *i* $R_{ij}$ *są tensorami odpowiednio Riemanna i Ricci'ego rozmaitości* $A_n$.

**Twierdzenie 12.** [P3] *Przestrzeń equiafiniczna* $A_n$ *dopuszcza odwzorowanie geodezyjne na przestrzeń Riemanna* $\bar V_n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zupełny układ liniowych równań różniczkovych typu Cauchy'ego w pochodnych kowariantnych w* $A_n$

$$\begin{array}{lrcl} (a) & a^{ij}_{\ ,k} & = & \lambda^i\,\delta^j_k \;+\; \lambda^j\,\delta^i_k; \\ (b) & n\,\lambda^i_{\ ,j} & = & \mu\,\delta^i_j - a^{i\alpha}R_{\alpha j} - a^{\alpha\beta}R^i_{\alpha\beta j}; \\ (c) & (n-1)\,\mu_{,i} & = & -2(n+1)\lambda^\alpha R_{\alpha i} - a^{\alpha\beta}(2R_{\alpha i,\beta} - R_{\alpha\beta,i}) \end{array}$$

*posiada rozwiązanie względem nieznanego symetrycznego niezdegenerowanego tensora* $a^{ij}$, *wektora* $l^i$ *i funkcji* $\mu$.

*Tutaj* $R^h_{ijk}$ *i* $R_{ij} = R^\alpha_{i\alpha j}$ *są współrzędnymi tensorów Riemanna i Ricci'ego w* $A_n$, *przecinek " , " oznacza pochodną kowariantną w przestrzeni* $A_n$.

Na każdej rozmaitości z koneksją afiniczną $\Gamma^h_{ij}(x)$ istnieje normalna koneksja afiniczna $\Gamma^h_{ij}$, patrz È. Cartan [7] i J.M. Thomas [87], patrz też [21, s. 105]. Te koneksje mają wspólne geodezyjne. Z drugiej strony, normalna afiniczna koneksja jest equiafiniczną. Dlatego wyżej wspomniane stwierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich przestrzeni z koneksją afiniczną. Później, podobne wyniki otrzymali Matveev i Eastwood [18] z powołaniem się na [P3].

Analogiczne rezultaty otrzymano dla odwzorowań geodezyjnych przestrzeni Finslera na przestrzenie Riemanna [P9]. W [P22] i [P25] badaliśmy geodezyjne odwzorowania na symetryczne i Ricci symetryczne rozmaitości. W tych przypadkach także znaleźliśmy podstawowe układy typu Cauchy'ego. Przypomnijmy, że dużo innych badaczy również studiowało to zagadnienie, patrz np. [49].

3.4. **Odwzorowania prawie geodezyjne.** Jak już wspomniano wyżej prawie geodezyjne odwzorowania są uogólnionymi odwzorowaniami geodezyjnymi. N.S. Sinyukov [82] określił trzy typy prawie geodezyjnych odwzorowań: $\pi_1, \pi_2$ i $\pi_3$. Kwestia zupełności takiego podziału pozostaje otwarta. W pracy [P4] udowodniliśmy, że nie istnieją inne typy prócz wymienionych dla $n > 5$.

Praca [P5] jest poświęcona badaniu odwzorowań $\pi_1$ z warunkiem zachowania $n$-ortogonalnego układu hiperpowierzchni. Znaleziono metryki Riemanna, które dopuszczają wspomniane odwzorowania.

W pracach [P6] – [P8], [P10] – [P15] badaliśmy specjalne przypadki prawie geodezyjnych odwzorowań pierwszego typu. Znaleźliśmy tam podstawowe równania w postaci układu typu Cauchy'ego.

Załóżmy, że odwzorowywane przestrzenie z koneksjami afinicznymi $A_n$ i $\bar A_n$ spełniają następujące warunki:

$$P^h_{ij,k} + P^h_{ik,j} = -P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k} - P^\alpha_{ik}P^h_{\alpha j} + \delta^h_{(i}a_{jk)}. \tag{12}$$

Odwzorowania te przedstawiają szczególny przypadek prawie geodezyjnych odwzorowań pierwszego typu (2). Otrzymujemy następujące stwierdzenie [P15].

**Twierdzenie 13.** *Tensor Riemanna $R^h_{ijk}$ jest niezmienniczym geometrycznym obiektem przestrzeni z koneksją afiniczną względem prawie geodezyjnych odwzorowań określonych przez (12).*

**Twierdzenie 14.** *Jeżeli przestrzeń afiniczna $A_n$ dopuszcza prawie geodezyjne odwzorowanie określone przez (12) na $\bar{A}_n$, wtedy $\bar{A}_n$ jest także przestrzenią afiniczną.*

Stąd, przestrzenie afiniczne tworzą zamkniętą klasę prawie geodezyjnych odwzorowań określonych przez (12). Równania (12) mogą być zredukowane do zamkniętego typu Cauchy'ego układu w pochodnych kowariantnych.

Rozważmy kanoniczne prawie geodezyjne odwzorowanie pierwszego typu przestrzeni z koneksją afiniczną $A_n \to \bar{A}_n$ określone przez następujące równania (patrz [P20]):

$$P^h_{ij,k} + P^h_{ik,j} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k} - P^\alpha_{ik} P^h_{\alpha j} + a_{i(j}\delta^h_{k)}, \tag{13}$$

gdzie $a_{ij}$ jest tensorem symetrycznym (przecinek oznacza pochodną kowariantną w przestrzeni z koneksją afiniczną $A_n$).

Równania (13) mogą być zredukowane do zamkniętego typu Cauchy'ego układu w pochodnych kowariantnych względem funkcji $P^h_{ij}(x)$ i $a_{ij}(x)$. Możemy udowodnić, że liczba istotnych parametrów, od których zależy ogólne rozwiązanie takich układów nie przekracza $n(n+1)^2/2$.

**Twierdzenie 15.** *Tensory*

$$\tilde{W}^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\,(R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j), \qquad W_{ij} = R_{ij} - R_{ji},$$

*i rzutowy tensor krzywizny Weyla są niezmienniczymi geometrycznymi obiektami względem prawie geodezyjnego odwzorowania pierwszego typu określonego przez (13).*

**Twierdzenie 16.** *Jeżeli rzutowo euklidesowa lub equiafiniczna przestrzeń $A_n$ dopuszcza prawie geodezyjne odwzorowanie, scharakteryzowane przez (13), na $\bar{A}_n$, wtedy $\bar{A}_n$ jest także odpowiednio rzutowo euklidesową lub equiafiniczną przestrzenią.*

Dlatego rzutowo euklidesowe i equiafiniczne przestrzenie tworzą zamknięte klasy względem prawie geodezyjnych odwzorowań określonych przez równania (13).

W przypadku, gdy tensor $a_{ij}$ tożsamościowo znika, równania (13) są zupełnie całkowalne.

3.5. **Niezmiennicze geometryczne obiekty poszczególnych odwzorowań.** Wiadomo, że T.Y. Thomas otrzymał niezmienniczy obiekt geometryczny względem geodezyjnych odwzorowań. Jest to parametr rzutowy. H. Weyl [93] otrzymał obiekty tensorowe, które są niezmiennikami odpowiednio konforemnych i geodezyjnych odwzorowań. Analogicznie znaleziono obiekty, które są niezmiennikami względem holomorficznie rzutowych odwzorowań. Jak wiadomo, tymi obiektami są: tensor Weyla konforemnej krzywizny, tensor Weyla rzutowej krzywizny i tensor Yano holomorficznej krzywizny.

W pracy [P24] studiujemy odwzorowania, które zachowują tensory Riemanna i Ricci'ego. Taki problem był badany dla geodezyjnych i kanonicznych prawie geodezyjnych odwzorowań $\pi_1$. W tym przypadku znaleźliśmy tensorowe kryteria, dla których te tensory są zachowane.

3.6. **Koncyrkularne pola wektorowe przestrzeni z koneksją afiniczną.** Koncyrkularne pola wektorowe są ściśle związane z konforemnymi, geodezyjnymi i innymi odwzorowaniami, patrz [82] i [P17]. Praca [P19] jest poświęcona badaniu podstawowych równań tych pól wektorowych. Określamy warunki różniczkowalności obiektów geometrycznych i otrzymujemy tensorowe kryteria przestrzeni, które dopuszczają maksimum niezależnych koncyrkularnych pól wektorowych.

3.7. **Podrozmaitości zespolone.** W końcu, w [P23] z Cherevko i Chepurną badamy podrozmaitości zespolone LCK-rozmaitości, rozmaitości pseudo Vaismana i Vaismana. Ta praca jest poświęcona immersji podrozmaitości w LCK-rozmaitości, gdy przestrzeń styczna w każdym punkcie podrozmaitości jest normalna do pola Lee'ego i znajdujemy warunki, dla których LCK-rozmaitość dopuszcza immersje podrozmaitości zespolonych. Badamy także własności form Lee'ego rozmaitości Vaismana i pseudo-Vaismana.

Na zakończenie, wiele otrzymanych rezultatów w bardziej rozwiniętej postaci jest zawartych w monografii [P17] i przeglądowych pracach [P16] i [P18].

## 4. Plan dla przyszłych badań naukowych

Planujemy kontynuację badań geodezyjnych i prawie geodezyjnych odwzorowań i ich uogólnień.

Geodezyjne i holomorficznie rzutowe odwzorowania mają wiele otwartych problemów. Ostatnio wielu matematyków pracuje intensywnie nad rozwiązaniami tych otwartych problemów, dla przykładu [34,38,40,54]. W tej pracy zakładamy kooperację z kolegami z Czech, Węgier, Polski i Ukrainy,

Ponadto, większość wyników była otrzymana dla geometrii lokalnej. Zakładamy badanie problemów globalnych, gdy przestrzenie są zwarte lub geodezyjnie zamknięte. Na tym polu wielu naukowców kontynuuje swoje badania.

## References


[1] Aminova, A. V.: *Groups of projective and affine motions in the spaces of general relativity theory. I*, Trudy Geometr. Sem., **6** (1974), 317–346.

[2] Aminova, A. V.: *Transformation groups of Riemannian manifolds*, in: *Problems in geometry, Vol. 22 (Russian)*, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990 pp. 97–165, 219, translated in J. Soviet Math. **55** (1991), no. 5, 1996–2041.

[3] Aminova, A. V.: *Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds*, J. Math. Sci. (N. Y.), **113** (2003), No. 3, 367–470, geometry, 9.

[4] Binh, T. Q. and Tamássy, L.: *On recurrence or pseudo-symmetry of the Sasakian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold*, Indian J. Pure Appl. Math., **35** (2004), No. 4, 555–560.

[5] Brinkmann, H. W.: *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*, Math. Ann., **94** (1925), No. 1, 119–145.
URL `https://doi.org/10.1007/BF01208647`

[6] do Carmo, M. P.: *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[7] Cartan, E.: *Sur les variétés à connexion projective*, Bull. Soc. Math. France, **52** (1924), 205–241.

[8] Cartan, E.: *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. I, II.*, Bull. Soc. Math. Fr., **54** (1926), 214–264.

[9] Cartan, E.: *La theorie des groupes finis et continus et la geometrie differentielle traitees par la methode du repere mobile*, Moscow Univ. Press, 1963.

[10] Chudá, H. and Shiha, M.: *Conformal holomorphically projective mappings satisfying a certain initial condition*, Miskolc Math. Notes, **14** (2013), No. 2, 569–574.

[11] Defever, F. and Deszcz, R.: *A note on geodesic mappings of pseudosymmetric Riemannian manifolds.*, Colloq. Math., **62** (1991), No. 2, 313–319.

[12] Defever, F. and Deszcz, R.: *Some results on geodesic mappings of Riemannian manifolds satisfying the condition $R \cdot R = Q(S, R)$*, Period. Math. Hungar., **29** (1994), No. 3, 267–276.

[13] Denisov, V. I.: *Special conformal mappings in general relativity*, Ukrain. Geom. Sb., (1985), No. 28, 43–50, ii.

[14] Deszcz, R.: *On semi-decomposable conformally recurrent and conformally birecurrent riemannian spaces*, Prace Nauk. Inst. Mat. Politechn. Wrocław. No. 16 Ser. Stud. i Materiały, (1976), No. 12, 27–33.

[15] Deszcz, R.: *On some Riemannian manifolds admitting a concircular vector field*, Demonstratio Math., **9** (1976), No. 3, 487–495.

[16] Deszcz, R. and Prvanović, M.: *Holomorphically projective mappings onto semisymmetric anti-Kähler manifolds.*, Tensor, New Ser., **75** (2014), No. 1, 9–28.

[17] Domašev, V. and Mikeš, J.: *On the theory of holomorphically projective mappings of Kählerian spaces*, Mat. Zametki, **23** (1978), No. 2, 297–303.

[18] Eastwood, M. and Matveev, V.: *Metric connections in projective differential geometry*, in: *Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations*, vol. 144 of *IMA Vol. Math. Appl.*, Springer, New York, 2008 pp. 339–350.

[19] Egorov, I. P.: *Motions in spaces of affine connection*, in: *Motions Spaces Affine Connections (Russian)*, Izdat. Kazan. Univ., Kazan, 1965 pp. 5–179.

[20] Egorov, I. P.: *Automorphisms in generalized spaces*, in: *Problems in geometry, Vol. 10 (Russian)*, VINITI, Moscow, 1978 pp. 147–191, 224 (errata insert).

[21] EISENHART, L. P.: *Non-Riemannian geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1926.

[22] EISENHART, L. P.: *Continuous groups of transformations*, Dover Publications, Inc., New York, 1961.

[23] EISENHART, L. P.: *Riemannian geometry*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, eighth printing, Princeton Paperbacks.

[24] EVTUSHIK, L. E., HINTERLEITNER, I., GUSEVA, N. I., AND MIKEŠ, J.: *Conformal mappings onto Einstein spaces*, Russ. Math., (2016), No. 10, 5–9.

[25] EVTUSHIK, L. E., KIOSAK, V. A., AND MIKEŠ, J.: *On the mobility of Riemannian spaces with respect to conformal mappings onto Einstein spaces*, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), (2010), No. 8, 29–33.

[26] FECKO, M.: *Differential geometry and Lie groups for physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[27] FINNIKOV, S.: *A course on differential geometry*, Gostechizdat, Moscow, 1952.

[28] FORMELLA, S.: *On geodesic mappings in Einstein manifolds*, in: *Topics in differential geometry, Vol. I, II (Debrecen, 1984)*, vol. 46 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, North-Holland, Amsterdam, 1988 pp. 483–492.

[29] FORMELLA, S.: *Projective structures in Sinyukov manifolds*, in: *Differential geometry and its applications (Eger, 1989)*, vol. 56 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, North-Holland, Amsterdam, 1992 pp. 263–271.

[30] FORMELLA, S. AND MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings of Einstein spaces*, Ann. Sci. Stetinenses, **9** (1994), No. 1, 31–40.

[31] FUBINI, G.: *Sui gruppi transformazioni geodetiche*, Mem. Acc. Torino, **2** (1903), 261–313.

[32] GAVRILCHENKO, M., KIOSAK, V., AND MIKEŠ, J.: *Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces*, Russian Math., (2004), No. 11, 20–26.

[33] HELGASON, S.: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, vol. 80 of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[34] HINTERLEITNER, I.: *Holomorphically projective mappings of (pseudo-) Kähler manifolds preserve the class of differentiability*, Filomat, **30** (2016), No. 11, 3115–3122.
URL `https://doi.org/10.2298/FIL1611115H`

[35] HINTERLEITNER, I. AND MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings onto /w(eyl manifolds*, J. Appl. Math., (2009), No. 1, 125–133.

[36] HINTERLEITNER, I. AND MIKEŠ, J.: *Projective equivalence and spaces with equi-affine connection*, Fundam. Prikl. Mat., **16** (2010), No. 1, 47–54.

[37] HINTERLEITNER, I. AND MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings and Einstein spaces*, in: *Geometric methods in physics*, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Basel, 2013 pp. 331–335.

[38] HINTERLEITNER, I. AND MIKEŠ, J.: *On holomorphically projective mappings from manifolds with equiaffine connection onto Kähler manifolds*, Arch. Math. (Brno), **49** (2013), No. 5, 295–302.
URL `https://doi.org/10.5817/AM2013-5-295`

[39] HINTERLEITNER, I. AND MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings and differentiability of metrics, affine and projective connections*, Filomat, **29** (2015), No. 6, 1245–1249.

[40] HINTERLEITNER, I., MIKEŠ, J., AND PEŠKA, P.: *Fundamental equations of F-planar mappings*, Lobachevskii J. Math., **38** (2017), No. 4, 653–659.
URL `https://doi.org/10.1134/S1995080217040096`

[41] HINTERLEITNER, I. AND MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability*, Miskolc Math. Notes, **14** (2013), No. 2, 575–582.

[42] HINTERLEITNER, I., MIKEŠ, J., AND STRÁNSKÁ, J.: *Infinitesimal F-planar transformations.*, Russ. Math., **52** (2008), No. 4, 13–18.

[43] HINTERLEITNER, I. AND MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings and Einstein spaces*, in: *Geometric methods in physics. XXX workshop*, Basel: Birkhäuser, 2013 pp. 331–335.

[44] KAGAN, V.: *Subprojective spaces*, Bibl. Russkoi Nauki, Moscow, 1961.

[45] KOBAYASHI, S. AND NOMIZU, K.: *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15 Vol. II, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[46] KURBATOVA, I. N.: *HP-mappings of H-spaces*, Ukrain. Geom. Sb., (1984), No. 27, 75–82.

[47] LAGRANGE, J.: *Sur la construction des cartes géographiques*, Novéaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Bell-Lettres de Berlin, (1799).

[48] LEVI-CIVITA, T.: *Sulle trasformazioni dello equazioni dinamiche*, Annali di Mat. (2), **24** (1896), 255–300.

[49] MATVEEV, V. S.: *Can we make a Finsler metric complete by a trivial projective change?*, in: *Recent trends in Lorentzian geometry. Based on the presentations at the 6th international meeting on Lorentzian geometry, Granada, Spain, September 6–9, 2011*, New York, NY: Springer, 2013 pp. 231–242.

[50] MIKEŠ, J.: *Holomorphically projective mappings of Kähler spaces*, Ukrain. Geom. Sb., (1980), No. 23, 90–98.

[51] MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings of semisymmetric riemannian spaces*, Odessk. Univ. Moscow: Archives at VINITI, (1986), No. 3924-76, 1–19.

[52] MIKEŠ, J.: *On special F-planar mappings of spaces with affine connection onto Riemannian spaces*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (1994), No. 3, 18–24, 97.

[53] MIKEŠ, J.: *Geodesic, F-planar and holomorphically projective mappings of Riemannian spaces and spaces with affine connections*, DrSc. Thesis, Palacky Univ. Olomouc, 1995.

[54] MIKEŠ, J., CHUDÁ, H., AND HINTERLEITNER, I.: *Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **11** (2014), No. 5, 1450044, 8.
URL `https://doi.org/10.1142/S0219887814500443`

[55] MIKEŠ, J., GAVRILCHENKO, M., AND GLADYSHEVA, E.: *Conformal mappings onto Einstein spaces*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (1994), No. 3, 13–17, 97.

[56] MIKEŠ, J. AND HINTERLEITNER, I.: *On geodesic mappings of manifolds with affine connection*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), **26** (2010), No. 2, 343–347.

[57] MIKEŠ, J. AND STRAMBACH, K.: *Differentiable structures on elementary geometries*, Results Math., **53** (2009), No. 1-2, 153–172.

[58] MIKEŠ, J. AND CHUDÁ, H.: *On geodesic mappings with certain initial conditions*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), **26** (2010), No. 2, 337–341.

[59] MIKEŠ, J., VANŽUROVÁ, A., AND HINTERLEITNER, I.: *Geodesic mappings and some generalizations*, Olomouc: Palacký University, Faculty of Science, 2009.

[60] MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings of Einstein spaces.*, Math. Notes, **28** (1981), 922–923.

[61] MIKEŠ, J.: *Geodesic Ricci mappings of two-symmetric Riemann spaces.*, Math. Notes, **28** (1981), 622–624.

[62] MIKEŠ, J.: *On geodesic mappings of m-symmetric and generally semi-symmetric spaces.*, Russ. Math., **36** (1992), No. 8, 1.

[63] Mikeš, J.: *Special F-planar mappings of affinely connected spaces onto Riemannian spaces.*, Mosc. Univ. Math. Bull., **49** (1994), No. 3, 15–21.

[64] Mikeš, J.: *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*, J. Math. Sci., New York, **78** (1996), No. 3, 311–333.

[65] Mikeš, J.: *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, J. Math. Sci., New York, **89** (1998), No. 3, 1334–1353.

[66] Najdanović, M. S., Zlatanović, M. L., and Hinterleitner, I.: *Conformal and geodesic mappings of generalized equidistant spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), **98(112)** (2015), 71–84.

[67] Norden, A. P.: *Space with affine connection*, Nauka, Moscow, 1976.

[68] Olszak, K. and Olszak, Z.: *On pseudo-Riemannian manifolds with recurrent concircular curvature tensor*, Acta Math. Hungar., **137** (2012), No. 1-2, 64–71. URL `https://doi.org/10.1007/s10474-012-0216-5`

[69] Olszak, Z.: *On Ricci-recurrent manifolds.*, Colloq. Math., **52** (1987), 205–211.

[70] Olszak, Z.: *On para-Kählerian manifolds of recurrent conformal curvature*, Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II, **7(22)** (2000), 63–72 (2002).

[71] Penrose, R. and Rindler, W.: *Spinors and space-time. Vol. 2*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[72] Peška, P., Mikeš, J., Chudá, H., and Shiha, M.: *On holomorphically projective mappings of parabolic Kähler manifolds*, Miskolc Math. Notes, **17** (2016), No. 2, 1011–1019.

[73] Petrov, A. Z.: *New methods in the general theory of relativity*, Nauka, Moscow, 1966.

[74] Petrov, A. Z.: *Einstein spaces*, Pergamon Press, 1969.

[75] Radulovich, Z., Mikeš, J., and Gavrilchenko, M.: *Geodesic mappings and deformations of Riemannian spaces*, CID, Podgorica; OGU, Odessa, 1997.

[76] Rashevskii, P.: *Riemannian geometry and tensor analysis*, Nauka, Moscow, 1967.

[77] Roter, W.: *On the existence of certain conformally recurrent metrics*, Colloq. Math., **51** (1987), 315–327.

[78] Rund, H.: *The differential geometry of Finsler spaces*, Springer, 1959.

[79] Schouten, J. and Struik, D.: *Introduction into new methods in differential geometry*, 1935.

[80] Sinyukov, N. S.: *On geodesic mappings of Riemannian spaces onto symmetric Riemannian spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), **98** (1954), 21–23.

[81] Sinyukov, N. S.: *On the theory of a geodesic mapping of Riemannian spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **169** (1966), 770–772.

[82] Sinyukov, N. S.: *Geodesic mappings of Riemannian spaces*, Moscow: Nauka, 1979.

[83] Sinyukov, N. S.: *Almost-geodesic mappings of affinely connected and Riemannian spaces*, J. Sov. Math., **25** (1984), 1235–1249,.

[84] Škodová, M., Mikeš, J., and Pokorná, O.: *On holomorphically projective mappings from equiaffine symmetric and recurrent spaces onto Kählerian spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., (2005), No. 75, 309–316.

[85] Stanković, M. S., Zlatanović, M. L., and Vesić, N. O.: *Basic equations of G-almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity*, Czech. Math. J., **65** (2015), No. 3, 787–799.

[86] Stepanova, E. S., Mikeš, J., and Tsyganok, I. I.: *A geodesic mapping and its field of symmetric linear endomorphisms*, Diff. Geom. Appl., **35** (2014), 44–49.

[87] Thomas, J. M.: *Asymmetric displacement of a vector*, Trans. Amer. Math. Soc., **28** (1926), No. 4, 658–670.

[88] Thomas, T. Y.: *The differential invariants of generalized spaces*, Cambr. Univ. Press, 1934.

[89] Vavříková, H., Mikeš, J., Pokorná, O., and Starko, G.: *On the basic equations of the almost geodesic mappings $\pi_2(e)$*, Russ. Math., (2007), No. 1, 8–12.

[90] Velimirović, L. S. and Ćirić, M. S.: *On the total mean curvature of piecewise smooth surfaces under infinitesimal bending*, Appl. Math. Lett., **24** (2011), No. 9, 1515–1519.

[91] Velimirović, L. S., Ćirić, M. S., and Velimirović, N. M.: *On the Willmore energy of shells under infinitesimal deformations*, Comput. Math. Appl., **61** (2011), No. 11, 3181–3190.

[92] Walker, A.: *On Ruse's spaces of recurrent curvature.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **52** (1950), 36–64.

[93] Weyl, H.: *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., **1921** (1921), 99–112.

[94] Weyl, H.: *The classical groups*, Princeton Univ. Press, 1946.

[95] Yano, K.: *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Oxford-London-New York-Paris-Frankfurt: Pergamon Press. XII, 323 p. (1965)., 1965.

[96] Yano, K. and Bochner, S.: *Curvature and Betti numbers*, 1953.

[97] Zlatanović, M., Hinterleitner, I., and Najdanović, M.: *On equitorsion concircular tensor of generalized Riemannian spaces*, Filomat, **28** (2014), No. 3, 463–471.

[98] Zlatanović, M. and Stanković, V.: *Geodesic mapping onto Kählerian space of the third kind*, J. Math. Anal. Appl., **450** (2017), No. 1, 480–489.

[99] Zlatanović, M. L., Velimirović, L. S., and Stanković, M. S.: *Necessary and sufficient conditions for equitorsion geodesic mapping*, J. Math. Anal. Appl., **435** (2016), No. 1, 578–592.

[100] Zlatanović, M. L., Velimirović, L. S., and Stanković, M. S.: *Necessary and sufficient conditions for equitorsion geodesic mapping*, J. Math. Anal. Appl., **435** (2016), No. 1, 578–592.