XVII Konferencja z Probabilistyki
22-26 maja 2023 r.

Abstrakty

Oszacowania jądra ciepła półgrupy schrödingerowskiej

Miłosz Baraniewicz
Politechnika Wrocławska
e-mail: milosz.baraniewicz@pwr.edu.pl

Rozważmy operator Schrödingera postaci $H = -\Delta + V$ działający na $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, $d \geqslant 1$, gdzie funkcja potencjału $V : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ jest lokalnie ograniczona. Odpowiadająca półgrupa
schrödingerowska $\left\{e^{-tH} : t \geqslant 0\right\}$ ma postać

$$e^{-tH} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_t(x, y) f(y) dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx),\ t > 0.$$

Przedstawię nowe oszacowania jądra ciepła $u_t(x, y)$. W szczególności pokażę zastosowania naszych wyników do dwóch często spotykanych klas potencjałów. Dla potencjałów wiążących otrzymujemy oszacowania dwustronne a dla potencjałów zanikających dostajemy nowe oszacowanie górne.

Prezentacja przedstawia wyniki z wspólnej pracy napisanej wraz z dr. hab. Kamilem Kaletą [1].

[1] M. Baraniewicz, K. Kaleta, Integral kernels of Schrödinger semigroups with nonnegative locally bounded potentials, *2023+*, ArXiv:2302.13886v2

Kilka uwag o błądzeniu Grahma-Shmidta z zastosowaniami do hipotezy Komlosa

Witold Bednorz
Uniwersytet Warszawski
e-mail: wbednorz@mimuw.edu.pl

W zeszłym roku pojawił sie nowy wynik w kierunku rozwiazania znanej hipotezy Komlosa. Hipoteza ta mówi, że mając n wektorów w $\mathbb{R}^d$ z normą euklidesową co najwyżej jeden, zawsze istnieje takie kolorowanie ± 1, że norma ℓ_1 sumy ze znakiem wektorów jest stała, niezalezna od n i d. Zespół składający się z Nikhila Bansala, Haotian Jiang, Raghu Meki, Sahil Singli, Makrand Sinh udowodnił tę hipotezę korzystając z pewnej metody interpolacji, w której wektory są zaburzane przez dodanie małego szumu Gaussowskiego i gdy liczba wektorów $n = \omega(d \log d)$. Zaleznosc n od d jest najlepsza z mozliwych nawet w całkowicie losowym przypadku ustawienia wektorów. Wynik jest oparty na analizie algorytmu błądzenia Grahma-Shmidta, ściślej dowodzie jego sub-gaussowskości. Razem z doktorantem udało nam się poprawić nieco ten wynik i dzięki temu uzyskać pewną niewielką poprawę oszacowania Banaszczyka dla dla stałej w problemie Komlosa, to znaczy $\sqrt{\log d}$ w przypadku, gdy $n = d$. Przeanalizowaliśmy również niektóre rozszerzenia metody interpolacji wychodząc poza szum Gaussa.

Nielokalne zagadnienia brzegowe a konkatenacja procesów Markowa

Krzysztof Bogdan
Politechnika Wrocławska
e-mail: krzysztof.bogdan@pwr.edu.pl

Lokalne i nielokalne zaburzenia schroedingerowskie jąder całkowych mogą być wykorzystane do formułowania i rozwiązywania problemów z nielokalnymi warunkami brzegowymi, związanych z generatorami, półgrupami i procesami Markowa. Omówimy szczegółowo jeden z modeli przeanalizowanych w taki sposób i zasygnalizujemy dalsze perspektywy badań.

[1] K. Bogdan, W. Hansen, T. Jakubowski, Time-dependent Schroedinger perturbations of transition densities, *Studia Math.*, 2008, 189
[2] K. Bogdan, S. Sydor, On nonlocal perturbations of integral kernels, in Semigroups of operators—theory and applications, *Springer Proc. Math. Stat.*, 2015, 113
[3] K. Bogdan, M. Kunze, The fractional Laplacian with reflections, *preprint*, arXiv:2211.05511

Spacery losowe w rzadkim losowym środowisku

Dariusz Buraczewski
Uniwersytet Wrocławski
e-mail: dariusz.buraczewski@math.uni.wroc.pl

Losowe spacery w losowym środowisku zostały wprowadzone w latach 70-tych do modelowania losowego ruchu cząsteczki w obecności pewnego rodzaju przeszkód. Zachowanie takiego procesu jest uzależnione zarówno od losowości środowiska jak i losowości konkretnej trajektorii. Podczas wykładu wprowadzimy losowe spacery w rzadkim środowisku losowym i przedstawimy nowe twierdzenia graniczne dla tak zdefiniowanego procesu losowego.

[1] D. Buraczewski, P. Dyszewski, A. Kołodziejska, Weak quenched limit theorems for a random walk in a sparse random environment, *preprint*, https://arxiv.org/abs/2301.00478
[2] D. Buraczewski, A. Iksanov, A. Marynych, Random walks in a strongly sparse random environment, *Stochastic Processes and their Applications*, 130, 3990-4027, 2020
[3] D. Buraczewski, A. Iksanov, A. Marynych, A. Roitershtein, Random walks in a moderately sparse random environment, *Electronic Journal of Probability*, 24(69), 1-44, 2019

O ergodyczności w normie Fortet–Mouriera pewnej klasy kawałkami deterministycznych procesów Markowa

Dawid Czapla
Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach
e-mail: dawid.czapla@us.edu.pl

Niech Y będzie polską przestrzenią metryczną, zaś $\{S_i : i \in I\}$ skończoną rodziną ciągłych potoków (układów dynamicznych) przekształcających $\mathbb{R}_+ \times Y$ w Y. Ponadto, niech $\lambda : Y \to (0, \infty)$ będzie dowolną ograniczoną funkcją ciągłą o dodatnim kresie dolnym.

Obiektym naszych rozważań będzie kawałkami deterministyczny proces Markowa $\Psi := \{(Y(t), \xi(t))\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ o przestrzeni fazowej $X := Y \times I$ określony przez

$$Y(t) = S_{\xi_{n-1}}(t - \tau_{n-1}, Y_{n-1}), \;\; \xi(t) = \xi_{n-1} \;\text{ dla }\; t \in [\tau_{n-1}, \tau_n), \; n \in \mathbb{N},$$

gdzie $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest p.n. rosnącym do ∞ ciągiem nieujemnych zmiennych losowych (reprezentujących momenty skoków) o niezależnych przyrostach $\Delta\tau_n := \tau_n - \tau_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, charakteryzujących się rozkładem warunkowym postaci

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_n \leqslant t \,|\, \Phi_{n-1} = (y,i)) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(S_i(s,y))\,ds\right)$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, $(y,i) \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$, zaś ciąg $\Phi := \{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ danym jednorodnym łańcuchem Markowa, opisującym stany procesu Ψ tuż po skokach (tj. $\Psi(\tau_n) = \Phi_n$ dla $n \in \mathbb{N}_0$). Funkcję przejścia łańcucha Φ definiujemy tutaj za pomocą dowolnego jądra stochastycznego J na Y oraz macierzy $\{\pi_{ij}\}_{i,j\in I}$, złożonej z odzworowań ciągłych z Y w $[0,1]$, w taki sposób, że

$$\mathbb{P}(Y_n \in B \mid \Phi_{n-1};\, Y(\tau_n-) = y) = J(y,B),$$
$$\mathbb{P}(\xi_n = j \mid \Phi_{n-1};\, \xi_{n-1} = i,\, Y_n = y) = \pi_{ij}(y)$$

dla dowolnych $y \in Y$, zbiorów borelowskich $B \subset Y$, $i,j \in I$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

W ramach referatu zaprezentujemy wynik (udowodniony w [3]) dotyczący istnienia wzajemnej jednoznaczności między rodzinami rozkładów stacjonarnych procesu Ψ i łańcucha Φ. Ponadto, sformuułujemy ogólne kryterium gwarantujące wykładniczą ergodyczność półgrupy przejścia procesu Ψ w normie Fortet–Mouriera oraz adaptację tego kryterium w szczególnym przypadku, gdy J stanowi funkcję przejścia iterowanego układu funkcyjnego z dowolnym zbiorem transformacji (por. [2]).

Wyniki te stanowią uogólnienie rezultatów zawartych w naszej wcześniejszej pracy [1], gdzie rozważany był analogiczny model, lecz zakładający stałą (niezależną od stanu układu) intensywność skoków λ oraz stałe prawdopodobieństwa π_{ij} przełączania potoków.

[1] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, Exponential ergodicity in the bounded-Lipschitz distance for some piecewise-deterministic Markov processes with random switching between flows, *Nonlinear Analysis*, 2022, 215, art. no. 112678
[2] D. Czapla, J. Kubieniec, Exponential ergodicity of some Markov dynamical systems with application to a Poisson driven stochastic differential equation., *Dynamical Systems*, 2019, 34(1), 130–156
[3] D. Czapla, On the existence and uniqueness of stationary distributions for some class of piecewise deterministic Markov processes with state-dependent jump intensity, *preprint*, ArXiv: 2303.11576

k-REGULARNE PROCESY FRAGMENTACJI

Piotr Dyszewski
Uniwersytet Wrocławski
e-mail: `pdysz@math.uni.wroc.pl`

Badamy asymptotykę k-regularnego samopodobnego procesu fragmentacji. Dla $a > 0$ i liczby całkowitej $k \geqslant 2$ jest to proces Markowa $(I_t)_{t\geqslant 0}$, w którym każdy I_t jest sumą otwartych podzbiorów $[0,1)$ i w którym niezależnie każdy zbiór w I_t o mierze u rozpada się na k równych kawałków z intensywnością u^a. Niech k^{-m_t}

i k^{-M_t} będą odpowiednio rozmiarami największego i najmniejszego fragmentu w I_t. Towarzysząc z $(I_t)_{t\geqslant 0}$ gałązkowy spacer losowy jesteśmy w stanie znaleźć deterministyczne funkcje g i h takie, że $|m_t - g(t)| \leqslant 1$ i $|M_t - h(t)| \leqslant 1$ dla dostatecznie dużych t.

[1] P. Dyszewski, N. Gantert, S. G. G. Johnston, J. Prochno, D. Schmid, Sharp concentration for the largest and smallest fragment in a k-regular self-similar fragmentation, *The Annals of Probability*, 2022, Vol. 50, No. 3, 1173–1203

Boolowskie prawo tangesa

Wiktor Ejsmont
Politechnika Wrocławska
e-mail: `wiktor.ejsmont@pwr.edu.pl`

W referacie przedstawię twerdzenia graniczne dla sumy komutatorów i anykomutatorów dla Boolowskich zmiennych losowych. Okazuje się, że graniczne rozkłady są opisane przez uogónioną funkcje tangesa. Są to wyniki wspólnie z Patrycją Hęćką.

Stochastyczne równania różniczkowe z odbijającymi barierami względem opcjonalnych procesów o regulowanych trajektoriach

Adrian Falkowski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
e-mail: `adrian.falkowski@mat.umk.pl`

W trakcie referatu przedstawione zostaną wyniki dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(\cdot, X)\, dM + \int_0^t g(\cdot, X)\, dA + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

z opcjonalnymi barierami L, U takimi, że $L_t \leqslant U_t$, $t \in \mathbb{R}^+$. W powyższym równaniu M i A są odpowiednio opcjonalnym martyngałem całkowalnym z kwadratem i procesem opcjonalnym o lokalnie skończonej wariacji. Prezentowane wyniki zostały uzyskane z pominięciem typowego założenia o prawostronnej ciągłości filtracji oraz trajektorii procesów M, A, L i U. W konsekwencji wprowadzona zostanie nowa definicja rozwiązań problemu Skorochoda dla funkcji regulowanych.

Nierówności dla transformat martyngałowych z nieograniczonym ciągiem transformującym

Tomasz Gałązka
Uniwersytet Warszawski
e-mail: t.galazka@mimuw.edu.pl

Zajmiemy się uogólnieniem optymalnego oszacowania silnego i słabego typu dla transformat martyngałowych i całek stochastycznych. Wzmocnienie polega na tym, że porzucamy założenie o ograniczoności ciągu transformującego (funkcji podcałkowej), które zazwyczaj widnieje w pokrewnych rezultatach w literaturze. Zamiast tego dopuszczamy, aby powyższy ciąg (funkcja) należał do przestrzeni L^r; w konsekwencji, transformata (całka stochastyczna) okazuje się być ograniczona jako operator działający z przestrzeni L^q do przestrzeni L^p, gdzie $1/p = 1/q + 1/r$. Celem odczytu jest zidentyfikowanie dokładnej normy tego operatora, wraz z jego wersją dla słabych przestrzeni L^p z normą zadaną przez

$$\|\xi\|_{L^{p,\infty}} = \sup\left\{\mathbb{P}(A)^{1/p-1}\int_A |\xi|\mathrm{d}\mathbb{P} \,:\, A\in\mathcal{F},\, \mathbb{P}(A)>0\right\}.$$

Wynik pochodzi ze wspólnej pracy z A. Osękowskim. [1].

[1] Sharp estimates for martingale transforms with unbounded transforming sequences, preprint, ,

Steinhaus, Wiener i co dalej?

Adam Jakubowski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
e-mail: adjakubo@mat.umk.pl

Warto sobie uświadomić, że utożsamienie procesu stochastycznego z jego rozkładem na przestrzeni trajektorii jest stosunkowo nowym pojęciem i wywodzi się z prac Steinhausa [1] i Wienera [2].

$$2023 - 1923 = 100$$

[1] Hugo Steinhaus, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la measure, *Fundamenta Mathematicae*, 1923, 4(1), 286–310
[2] Norbert Wiener, Differential space, *Journal of Mathematics and Physics*, 1923, 2, 131–174

O rozkładach czasu lokalnego dyfuzji Ito-McKean'a

Jacek Jakubowski
Instytut Matematyki, Wydział MIM UW
e-mail: jakub@mimuw.edu.pl

Niech L oznacza czas lokalny w 0 dyfuzji Itô-McKean X. Przedstawię opis rozkładu L_t w terminach exponenty konwolucyjnej i opiszę gęstość przejścia pary (X, L). Podam przykłady. Referat będzie oparty na pracy wspólnej z M. Wiśniewolskim

[1] J. Jakubowski, M. Wiśniewolski, On bivariate distributions of the local time of Itô-McKean diffusion, *Bernoulli*, 2023

Asymptotyka problemu sterowania impulsowego z multiplikatywnym funkcjonałem zysku

Damian Jelito
Uniwersytet Jagielloński i Instytut Matematyczny PAN
e-mail: damian.jelito@uj.edu.pl

Sterowanie impulsowe pozwala na kontrolowanie procesów stochastycznych w czasie ciągłych za pomocą interwencji o naturze dyskretnej. Ten typ sterowania może być wykorzystywany np. do projektowania interwencji na rynkach walutowych, schematów eksploatacji zasobów naturalnych oraz portfeli inwestycyjnych uwzględniających koszty transakcyjne. W trakcie referatu opowiemy o wynikach dotyczących sterowania impulsowego z multiplikatywnym funkcjonałem typu średni koszt na jednostkę czasu. Przedstawimy konstrukcję skojarzonego z problemem równania Bellmana, która wykorzystuje twierdzenie Kreina-Rutmana i aproksymację zagadnienia w rosnącej rodzinie zbiorów zwartych. Referat oparty jest na wspólnej pracy z Łukaszem Stettnerem.

[1] D. Jelito, Ł. Stettner, Asymptotics of impulse control problem with multiplicative reward, *accepted for the publication in Applied Mathematics and Optimization; arXiv:2301.04194*, 2023

Urbanik classes L_k and some definite integrals arising from selfdecomposable characteristic functions

Zbigniew J. Jurek
Uniwersytet Wrocławski
e-mail: zjjurek@math.uni.wroc.pl

A variable X is called *selfdecomoposable* ($X \in L_0$) if

$$\forall\,(t>0)\,\exists\,(X_t \in ID \text{ independent of X})\quad X \overset{d}{=} e^{-t}X + X_t. \tag{1}$$

For $k \geqslant 1$, a variable $X \in L_k$ (Urbanik class) iff $X_t \in L_{k-1}$ in (1).

Equivalently, $X \in L_k$ iff there exists a Lévy process process $Y_X(t), t \geqslant 0$, (*background driving Levy process* (BDLP)) such that

$$X = \int_0^\infty e^{-t} dY_X(\frac{t^{k+1}}{k+1}), \quad \mathbb{E}[\log^{k+1}(1+|Y_X(1)|)] < \infty;$$

Knowing that the hyperbolic-sine $\hat{S}$, with the characteristic function $\phi_{\hat{S}}(t) = t/\sinh(t)$ is selfdecomposble, more precisely that $\hat{S} \in L_2 \setminus L_3$ we get,
Lemma 1

$$(i) \int_0^\infty (\cos(tx)-1)\,(\pi/2)csch^2(\pi x/2)dx = 1 - t\,\mathrm{ctgh}(t);$$

$$(ii) \int_0^\infty (\cos(tx)-1)\,\frac{\pi}{2}csch^2(\frac{\pi x}{2})\,(\pi x\,\mathrm{ctgh}(\frac{\pi x}{2})-1)dx = t^2 csch^2(t) - t\,\mathrm{ctgh}(t);$$

$$\begin{aligned}(iii) \int_0^\infty (\cos(tx)-1)\,\frac{\pi}{4}csch^2(\pi x/2)\big[&2\pi^2x^2\,\mathrm{ctgh}^2(\pi x/2) + \pi^2x^2csch^2(\pi x/2)\\ &- 6\pi x\,\mathrm{ctgh}(\pi x/2)+2\big]dx = 3t^2csch^2(t) - t\,\mathrm{ctgh}(t)(2t^2csch^2(t)+1).\end{aligned}$$

In fact, these are logarithms of infinitely divisible characteristic functions (Lévy exponents).

[1] Z. J. Jurek, Which Urbanik class L_k, do the hyperbolic and generalized logistic characteristic functions belong to?, *Stat. Probab. Letters*, 2023, 197
[2] Z. J. Jurek, Some definite integrals arising from selfdecomposable characteristic functions, *preprint*, ArXiv:2301.11625
[3] Z. You, Some models for dependence in stochastic processes, *Ph.D. Thesis. University of California, Berkeley*, 2022

Własności kwazi-ergodyczne mocno fellerowskich półgrup operatorów zwartych na L^2

Kamil Kaleta
Politechnika Wrocławska
e-mail: kamil.kaleta@pwr.edu.pl

Opowiem o niektórych rezultatach pochodzących z preprintu [1], napisanego wspólnie z R. Schillingiem (TU Dresden), dotyczących własności kwazi-ergodycznych półgrup zwartych operatorów całkowych $\{U_t : t \geqslant 0\}$ na $L^2(M, \mu)$, gdzie M jest lokalnie zwartą przestrzenią polską wyposażoną w lokalnie skończoną miarą borelowską μ. Zakładamy, że rozważane półgrupy (oraz półgrupy dualne do nich) są ultrakontraktywne, a ich operatory poprawiają dodatniość, ale nie wymagamy samosprzężoności ani nawet normalności. Pierwszy wynik wiąże (wykładniczą w czasie) kwazi-ergodyczność rozważanych połgrup na $L^p(M, \mu)$ i jednoznaczność miary kwazi-niezmienniczej ze skończonością parametru opisującego tzw. ciepło całkowite. Uzyskane przez nas oszacowanie wydaje się dość praktyczne, ale nie zawsze daje dobrą kontrolę przestrzenną. Drugi rezultat podaje pełną charakteryzację nieco mocniejszej własności, gdzie zbieżność jest jednostajna względem pewnej rosnącej rodziny zbiorów (indeksowanej czasem) wypełniającej przestrzeń, a tempo zbieżności zależy od tempa zaniku funkcji $U_{t_0}\mathbf{1}_M(x)$ (dla pewnego $t_0 > 0$) w nieskończoności. Jednym z motywów podjęcia tych badań była chęć uzyskania pełnego opisu własności kwazi-ergodycznych półgrup ewolucyjnych związanych z pewną klasą nielokalnych operatorów Schrödingera z potencjałami wiążącymi, dla których znane są ostre oszacowania funkcji własnych stanu podstawowego [2] oraz jąder ciepła [3].

[1] K. Kaleta, R.L. Schilling, Quasi-ergodicity of compact strong Feller semigroups on L^2, *preprint*, ArXiv:2304.12834

[2] K. Kaleta, J. Lőrinczi, Pointwise eigenfunction estimates and intrinsic ultracontractivity-type properties of Feynman-Kac semigroups for a class of Levy processes, *Annals of Probability*, 2015, 43(3) 1350–1398

[3] K. Kaleta, R.L. Schilling, Progressive intrinsic ultracontractivity and heat kernel estimates for non-local Schrödinger operators, *Journal of Functional Analysis*, 2020, 279(6) 108606

Prawo wielkich liczb dla iteracji funkcji o wartościach losowych

Rafał Kapica
AGH w Krakowie
e-mail: `rafal.kapica@agh.edu.pl`

Niech $(\Omega, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, X przestrzenią polską, a $f\colon X\times\Omega \to X$ funkcją losową. Rozważać będziemy ciąg $(f^n(x,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ iteracji funkcji f dany wzorem $f^0(x,\omega) = x, f^n(x,\omega) = f(f^{n-1}(x,\omega),\omega_n)$ dla $x \in X$ i $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ oraz jego słabą granicę μ. Podamy warunki na funkcję f i funkcję $\psi : X \to \mathbb{R}$, zapewniające równość $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi \circ f^k(x,\cdot) = \int_X \psi\, d\mu$.

[1] R. Kapica, M. Ślęczka, Law of large numbers for random iteration, *J. Difference Equ. Appl.*, 2018, 24(5), 736–745
[2] K. Baron, R. Kapica, Strong law of large lumbers for iterates of some random-valued functions, *Result. Math.*, 2022, 77(1), Paper No. 50, 14 p.

Jedyność pól losowych Markowa z wielokrotnymi oddziaływaniami

Dorota Kępa-Maksymowicz
Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
e-mail: `dorota.kepa-maksymowicz@mail.umcs.pl`

Jerzy Kozicki
Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
e-mail: `jkozi@hektor.umcs.lublin.pl`

Rozważymy losowe pola Markowa na zbiorze V, określone przez specyfikację γ, dla której strukturę zależności wprowadza się za pomocą tzw. pre-modyfikacji $(h_e)_{e\in\mathsf{E}}$ – zgodnej rodziny funkcji $h_e : S \to [0, +\infty)$, gdzie S jest standardową przestrzenią borelowską a E nieskończoną rodziną skończonych zbiorów $e \subset \mathsf{V}$. Różne e mogą zawierać różne ilości elementów co w szczególności oznacza, że graf zależności $\mathsf{H} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$ może być hipergrafem. Dla $e \in \mathsf{E}$, niech $\delta(e)$ będzie logarytmiczną oscylacją funkcji h_e. Stwierdzimy, że zbiór wszystkich pól $\mathcal{G}(\gamma)$ jest jednoelementowy jeśli $\delta(e)$ spełnia warunek, który w szczególnym przypadku przybiera postać $\delta(e) \leqslant \varkappa g(n_{\mathsf{L}}(e))$, dla wszystkich e i pewnej stałej $\varkappa \in (0, 1)$ charakterystycznej dla hipergrafu H. Funkcja g jest rosnąca, np. $g(n) = a+\log n$, zaś $n_{\mathsf{L}}(e)$ jest – globalnie nieograniczonym – stopniem wierzchołka e w grafie liniowym $\mathsf{L}(\mathsf{H})$. Powyższy warunek jedyności jest mniej restrykcyjny niż klasyczny warunek Dobruszyna, w którym $|e|$, $n_{\mathsf{L}}(e)$ albo $\delta(e)$ muszą być globalnie ograniczone. Ponadto, jeśli jest spełniony, jedyny element zbioru $\mathcal{G}(\gamma)$ jest globalnie Markowowski.

[1] H.-O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, *de Gruyer, New York*, 1988
[2] D. Kępa-Maksymowicz, Y. Kozitsky, Uniqueness of Gibbs fields with unbounded random interactions on unbounded degree graphs, *Lett. Math. Phys.*, 2020, 110, 2505-2518

Kolejki gaussowskie w losowym oknie czasu

Krzysztof Kępczyński
Uniwersytet Wrocławski
e-mail: krzysztof.kepczynski@math.uni.wroc.pl

W referacie zbadamy asymptotyczne zachowanie procesu wypełnienia bufora dla stacjonarnej kolejki gaussowskiej

$$\sup_{-\infty<s\leqslant t\leqslant T}(B_H(t)-B_H(s)-c(t-s)),$$

gdzie $B_H(\cdot)$ jest standardowym ułamkowym ruchem Browna (fBm) z parametrem Hursta H, a T jest zmienną losową niezależną od $B_H(\cdot)$. Rozpatrzymy cztery sceniariusze ze względu na ciężkość T.
Przedstawione wyniki oparte są na wspólnej pracy z Krzysztofem Dębickim (Uniwersytet Wrocławski) i Michelem Mandjesem (University of Amsterdam).

[1] K. Dębicki, K. Kępczyński & M. Mandjes, Gaussian queues over a random time window, *work in progress*,

Twierdzenia graniczne dla procesów gałązkowych

Konrad Kolesko
University of Giessen
e-mail: Konrad.Kolesko@math.uni-giessen.de

Procesy gałązkowe stanowią ważną klasę procesów stochastycznych z licznymi zastosowaniami zarówno praktycznymi jak również teoretycznymi. W moim referacie przedstawię twierdzenia graniczne dotyczące tych procesów, które pozwalają na określenie asymptotycznego rozwinięcia aż do fluktuacji gaussowskich.

Ogony wolnych splotów multiplikatywnych

Bartosz Kołodziejek
Politechnika Warszawska
e-mail: bartosz.kolodziejek@pw.edu.pl

W referacie będziemy badali ogony wolnych splotów multiplikatywnych $\boxtimes$ miar probabilistycznych. Podobnie jak zwykły splot multplikatywny, $\boxtimes$ jest binarną operacją na $\mathcal{M}_+\times\mathcal{M}_+$, gdzie $\mathcal{M}_+$ jest przestrzenią miar probabilistycznych na $[0,\infty)$. Wolne sploty multiplikatywne w naturalny sposób pojawiają się przy badaniu spektrum iloczynu dużych niezależnych macierzy losowych.

Podstawowym narzędziem do opisu miary $\sigma=\mu\boxtimes\nu$ jest jej S-transformata, która spełnia równanie

$$S_\sigma=S_\mu\,S_\nu.$$

Przedstawimy pełną charakteryzację zachowania S-transformaty przy $0-$ dla miar z regularnie zmieniającymi się ogonami, tzn. gdy

$$\mu\big((x,+\infty)\big)\sim x^{-\alpha}L(x),$$

gdzie $\alpha \geqslant 0$, L jest funkcją wolno zmieniającą się, a $f(x) \sim g(x)$ oznacza, że $g(x)/f(x) \to 1$, gdy $x \to +\infty$.

Wynik ten zastosujemy do opisu asymptotyki ogonów wolnych potęg splotowych $\mu^{\boxtimes t}$, $t \geqslant 1$. Obserwujemy interesujące przejście fazowe w postaci ogonów pomiędzy reżimami $\alpha < 1$ i $\alpha > 1$.

Referat oparty jest na wspólnej pracy z Kamilem Szpojankowskim (Politechnika Warszawska).

[1] B. Kołodziejek, K. Szpojankowski, A phase transition for tails of the free multiplicative convolution powers, *Advances in Mathematics*, 2022, 403, 108398:1-50.

O CIĄGŁEJ ZALEŻNOŚCI SŁABYCH GRANIC ITERACJI PEWNYCH FUNKCJI LOSOWYCH O WARTOŚCIACH WEKTOROWYCH

Dawid Komorek
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
e-mail: `komorek@agh.edu.pl`

Niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, X przestrzenią polską z σ-algebrą $\mathcal{B}(X)$ zbiorów borelowskich, ponadto niech dane będą odwzorowania $\Lambda\colon \Omega \to L(X,X)$ i $\xi\colon \Omega \to X$. Rozważamy $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{A}$-mierzalne funkcje $f\colon X \times \Omega \to X$ dane wzorem $f(x,\omega) = \Lambda(\omega)x + \xi(\omega)$. Dla tak określonych funkcji losowych f badamy ciągłość operatora $f \mapsto \pi^f$, gdzie π^f jest słabą granicą ciągu iteracji $(f^n(x,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowanych wzorem $f^0(x,\omega) = x, f^{n+1}(x,\omega) = f(f^n(x,\omega),\omega_{n+1})$ dla $x \in X$ i $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$. Zakładając, że X jest przestrzenią Hilberta, charakteryzujemy rozkład π^f poprzez równanie

$$\varphi^f(u) = \int_\Omega \varphi^f(\Lambda(\omega)u)\varphi^\xi(u)\mathbb{P}(d\omega),$$

gdzie φ^f jest funkcją charakterystyczną rozkładu π^f. Ponadto pokazujemy ciągłą zależność rozwiązań tego równania od parametrów funkcji losowej.

FLUKTUACJE INDEKSU ORAZ ENERGII SWOBODNEJ SKIEROWANEGO POLIMERU NA CYLINDRZE

Tomasz Komorowski
IMPAN
e-mail: `tkomorowski@impan.pl`

Sformułujemy centralne twierdzenie graniczne dla indeksu oraz energii swobodnej skierowanego polimeru na $1+1$ wymiarowym cylindrze. Podamy wzory na asymptotyczną wariancję oraz omówimy związek pomiędzy tymi wielkościami. Referat oparty jest na wspólnych wynikach z A. Dunlapem (Courant Institute) oraz Y. Gu (Univ. of Maryland)

[1] Y. Gu, T. Komorowski„KPZ on torus: Gaussian fluctuation, *to appear in Ann. Inst. H. Poincare, Prob. and Stat.*, https://arxiv.org/abs/2104.13540

[2] Y. Gu, T. Komorowski„Fluctuations of the winding number of a directed polymer on a cylinder, *to appear in SIAM Journ. Math. Anal.*, https://arxiv.org/abs/2207.14091

[3] A. Dunlap, Y. Gu, T. Komorowski„ Fluctuations of the KPZ equation on a large torus, *to appear in Comm. on Pure and Applied Math.*, https://arxiv.org/abs/2111.03650

Stabilność i niestabilność pewnych sieci kolejkowych

Łukasz Kruk
Instytut Matematyki UMCS
e-mail: lukasz.kruk@mail.umcs.pl

Wieloserwerową sieć kolejkową z wieloma klasami użytkowników nazywamy stabilną, jeśli opisujący jej dynamikę proces Markowa jest dodatni powracający w sensie Harrisa. Natomiast system taki nazywamy niestabilnym, jeśli dla pewnego stanu początkowego liczba klientów w sieci rośnie nieograniczenie z dodatnim prawdopodobieństwem. Zagadnienia stabilności sieci kolejkowych bywają delikatne, niekiedy niewielka modyfikacja systemu zupełnie zmienia jego długoterminowe zachowanie.

W referacie, po wprowadzeniu w tematykę, omówimy niestabilność sieci kolejkowych z kilkoma popularnymi protokołami obsługi, w których priorytet zadania zależy od jego wielkości, czyli czasu potrzebnego na jego wykonanie:
SRPT (Shortest Remaining Processing Time),
SJF (Shortest Job First),
LAS (Least Attained Service),
LRTF (Longest Remaining Time First).
Niektóre z tych protokołów znane są z optymalnego zachowania w systemie jednoserwerowym z pojedyńczą kolejką.

[1] M. Bramson, Stability of Queueing Networks. Lecture Notes in Mathematics 1950, *Springer-Verlag, New York*, 2008
[2] T. Chojecki, Ł. Kruk, Instability of SRPT, SERPT and SJF queueing networks, *Queueing Systems*, 2022, 101, 57-92
[3] Ł. Kruk, Instability of LAS multiclass queueing networks, *Operations Research Letters*, 2021, 49, 76-80
[4] Ł. Kruk, Instability of LRTF multiclass queueing networks, *Operations Research Letters*, 2023, 51, 201-205

O $1/H$-wahaniu ułamkowych ruchów Browna

Rafał Łochowski
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
e-mail: rlocho@sgh.waw.pl

Niech W_t^H, $t \geqslant 0$, będzie ułamkowym ruchem Browna z wykładnikiem Hursta H. W referacie przedstawię niedawne wyniki dotyczące zbieżności ciągu sum

$$S_T^c := \sum_{k=1}^{\infty} \left| W^H_{t_k^c \wedge T} - W^H_{t_{k-1}^c \wedge T} \right|^{1/H},$$

gdzie $t_1^c, t_2^c, \ldots$ są kolejnymi momentami dotarcia W^H do punktów z siatki $c \cdot \mathbb{Z} + r_c$ ($c > 0$, $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych, $r_c \in [0, c)$) gdy c zbiega do 0.

Na przykład okazuje się, że $S_T^{c_n}$ zbiega prawie na pewno do funkcji $C_H \cdot T$, gdzie C_H jest stałą zależną tylko od H, o ile ciąg c_n zbiega do 0 jak $n^{-\eta}$, gdzie η jest dowolną liczbą dodatnią. Stała C_H jednak jest inna niż stała, którą otrzymuje się gdy zamiast $t_1^c, t_2^c, \ldots$ weźmie się punkty deterministyczne, np. k/n, $k \in \mathbb{Z} \cap [0, +\infty)$.

Jest to wynik o tyle ciekawy, że dla procesów Markowa i semimartyngałów podobne zjawisko nie zachodzi.

Wyniki, które zaprezentuję powstały we współpracy z Witoldem Bednorzem, Ramą Cont, Purbą Das, Nicolasem Perkowskim i Toyomu Matsudą.

Nierówność typu Erharda dla izotropowej miary Cauchy'ego na płaszczyźnie

Jacek Małecki
Politechnika Wrocławska
e-mail: jacek.malecki@pwr.edu.pl

Podczas referatu opowiem o wynikach dotyczacych nierówności typu Ehrharda dla dwuwymiarowej izotropowej miary Cauchy'ego. W odróżnieniu od przypadku gaussowskiego, nierówność nie zachodzi dla zbiorów, które nie są wypukłe. Referat będzie oparty na wspólnej pracy z Tomaszem Byczkowkim i Tomaszem Żakiem [1], w której dowodzimy wspomnanej nierówności dla prostokątów, które są symetryczne względem jednej z osi układu współrzędnych.

[1] T. Byczkowski, J. Małecki, T. Żak, Ehrhard-type inequality for the isotropic Cauchy distribution on the plane., *Probab. Math. Stat.*, Vol. 42, Fasc. 1 (2022), pp. 163–175

Charakteryzacja rozmiaru procesów nieskończenie podzielnych

Rafał Martynek
Uniwersytet w Luksemburgu
e-mail: rafal.martynek@uni.lu

Procesy nieskończenie podzielne stanowią szeroką klasę procesów stochastycznych obejmującą m. in. procesy addytywne, procesy Ornsteina-Uhlenbecka czy procesy średniej kroczącej. Fundamentalne jest pytanie o rozmiar takich procesów rozumianego jako górne i dolne oszacowania wartości oczekiwanej supremum. Na podstawie wyników z prac [1] i [2] opowiem o rozkładzie wyjściowego procesu na dwa nowe, gdzie rozmiar pierwszego można wyjaśnić za pomocą metody łańcuchowej, natomiast opis rozmiaru drugiego jest związany z charakteryzacją tzw. procesów dodatnich.

[1] W. Bednorz, R. Martynek, The suprema of infinitely divisible processes, *Annals of Probability*, 2023, 50 (1), 397–417.
[2] W. Bednorz, R. Martynek, R. Meller, The suprema of selector processes with the application to positive infinitely divisible processes, *preprint*, arXiv:2212.14636.

Sekcje i projekcje kul w normach ℓ_p^n

Piotr Nayar
Uniwersytet Warszawski
e-mail: nayar@mimuw.edu.pl

Niech B_p^n oznacza kulę jednostkową w p-tej normie,

$$B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1|^p + \ldots + |x_n|^p \leqslant 1\}.$$

Przez $a^\perp$ oznaczamy hiperpłaszczyznę prostopadłą do wektora a. Rozważmy następujące pytanie: które sekcje $B_p^n \cap a^\perp$ mają największą i najmniejszą $(n-1)$-wymiarową objętość?

Podczas odczytu przybliżę historię powyższego problemu i opowiem o stosowanych w tym kontekście technikach, w tym o metodach probabilistycznych rozwiniętych w pracach [1,2,3].

[1] A. Eskenazis, P. Nayar, T. Tkocz, Gaussian mixtures: entropy and geometric inequalities, *Annals of Probability*, 2018, 46(5), 2908–2945.
[2] G. Chasapis, P. Nayar, T. Tkocz, Slicing ℓ_p-balls reloaded: Stability, planar sections in ℓ_1, *Annals of Probability*, 2022, 50(6), 2344–2372.
[3] A. Eskenazis, P. Nayar, T. Tkocz, Resilience of cube slicing in ℓ_p, *preprint*, arXiv:2211.01986

Graficzne podejście do wielowymiarowych procesów Hawkesa

Mariusz Niewęgłowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
e-mail: mariusz.nieweglowski@pw.edu.pl

W naszych wcześniejszych pracach wprowadziliśmy i badaliśmy wielowymiarowe uogólnienia procesów Hawkes'a (GMHP) które miały bardzo ważną własność, pozwalały mianowicie na bezpośrednie modelowanie jednoczesnego pojawiania się zdarzeń na różnych współrzędnych wielowymiarowego procesu. W tym referacie przedstawimy nasze najnowsze wyniki dotyczące GMHP. Procesy GMHP są wielowymiarowymi procesami punktowymi których kompensator zależy w pewien specjalny sposób od dwóch jąder tzw. jąder kierujących. Pierwsze jądro odpowiada za egzogeniczne (zewnętrzne) ekscytacje a drugie za endogeniczne ekscytacje. Wprowadzimy graficzny formalizm który pozwala na specyfikacje jąder kierujących w jasny i przejrzysty sposób. Następnie pokażemy jak w graficznym podejściu można postawić problem markowianizacji dla GMHP tzn. problemu podania warunków na jądra kierujące które prowadzą do sytuacji w której intensywności współrzędnych procesu są funkcjami pewnego nieznanego procesu Markowa. Pokażemy również, że przy takim podejściu można wyprowadzić układ równań różniczkowych którego rozwiązania dają transformaty Laplace'a pewnych funkcjonałów GMHP. Referat jest oparty na [4].

[1] A.G. Hawkes., Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes., Biometrika, 58(1):83–90, 1971.
[2] T.R. Bielecki, J. Jakubowski, M. Niewęgłowski, Construction and Simulation of Generalized Multivariate Hawkes Processes, *Methodology and Computing in Applied Probability*, (2022) 24:2865–2896

[3] T.R. Bielecki, J. Jakubowski, M. Niewęgłowski, Construction and Simulation of Generalized Multivariate Hawkes Processes, *Stochastic Models*, (2022) online
[4] T.R. Bielecki, J. Jakubowski, M. Niewęgłowski, Markovianization of Multivariate Hawkes processes, *preprint*,

Nierówności Feffermana dla martyngałów

Adam Osękowski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski
e-mail: A.Osekowski@mimuw.edu.pl

Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \geqslant 0} \in H^1$, $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0} \in BMO$ są martyngałami o ciągłych trajektoriach. Nierówność Feffermana mówi, iż istnieje uniwersalna stała C, dla której

$$\mathbb{E} \int_0^\infty |d\langle X, Y \rangle| \leqslant C \|X\|_{H^1} \|Y\|_{BMO}.$$

Odczyt będzie poświęcony rozmaitym wersjom i rozszerzeniom tego wyniku, ze szczególnym naciskiem położonym na uzyskanie optymalnych stałych. W szczególności, przedyskutujemy odpowiednie nierówności Feffermana w kontekście diadycznym; macierzowym; oraz konforemnym.

[1] T. Gałązka, A. Osękowski, Sharp analytic version of Fefferman's inequality, *preprint*, .
[2] A. Osękowski, On the best constant in the martingale version of Fefferman's inequality, *Bernoulli*, 2020, 26, 1912–1926
[3] A. Osękowski, A note on H1 - BMO duality, *Archiv der Mathematik*, 2020, 114, 687–697
[4] A. Osękowski, On the best constant in the estimate related to $H^1 - BMO$ duality, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2021, 149, 333—343
[5] A. Osękowski, An extension of $H^1 - BMO$ estimate to matrix-valued functions, *preprint*, .

Topologiczne metody w optymalnym stopowaniu i w grach Dynkina

Jan Palczewski
University of Leeds
e-mail: J.Palczewski@leeds.ac.uk

Opowiem o wynikach dotyczących istnienia punktu siodłowego w grach Dynkina w asymetryczną informacją opublikowanych w [1]. Nasze podejście oparte jest na metodach topologicznych, które swoimi korzeniami sięgają prac [2] i [3]. Referat rozpocznę od pokazania jak wyniki tych prac stosują się do problemów optymalnego stopowania i a później przejdę do rozważań dotyczących gier.

[1] De Angelis, T., Merkulov, N., Palczewski, J., On the value of non-Markovian Dynkin games with partial and asymmetric information, *The Annals of Applied Probability*, 2022, 32(3), 1774–1813
[2] Baxter, J. R., Chacon, R.V., Compactness of stopping times, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 1977, 40, 169–181
[3] Meyer, P.A., Convergence faible et compacité des temps d'arrêt d'après Baxter et Chacon, *In Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, 1978, 411–423

Konstrukcja krzywej Peano, dla której obraz każdego przedziału jest wypukły i charakteryzacja obrazów miary Lebesgue'a

Adam Paszkiewicz
Uniwersytet Łódzki
e-mail: adam.paszkiewicz@wmii.uni.lodz.pl

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wypukłym, domkniętym, ograniczonym i niepustym w $\mathbb{R}^2$. Omówimy dowód istnienia, paradoksalnej, „wypukłej krzywej Peano, wypełniającej T", czyli ciągłej suriekcji $f : [0,1] \to \mathbb{T}$, dla której obrazy wszystkich przedziałów są wypukłe.

Tą samą metodą scharakteryzujemy miary na $\mathbb{R}^2$, które są obrazami miary Lebesgue'a dla wypukłych krzywych Peano.

Wskażemy konsekwencje istnienia wypukłych krzywych Peano w badaniach odwzorowań afinicznych przestrzeni liniowo topologicznych.

Aproksymacja problemu Dirichleta przez rozwiązania problemu Robina

Andrzej Rozkosz
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
e-mail: rozkosz@mat.umk.pl

Rozpatrzmy problem brzegowy Robina (inne nazwy to problem Fouriera, problem Newtona, trzeci problem brzegowy):

$$-Lu_n + \lambda u_n = f \quad \text{w } D, \qquad -(a\nabla u_n)\cdot \mathbf{n} + nu_n = ng \quad \text{na } \partial D,$$

gdzie L jest jednostajnie eliptycznym symetrycznym operatorem w formie dywergencyjnej postaci

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

i $\mathbf{n}(x)$ jest jednostkowym wektorem normalnym w $x \in \partial D$ skierowanym do wewnątrz dziedziny D. Dobrze wiadomo (p. na przykład [1]), że jeżeli $f \in L^2(D)$ i $g \in H^1(D)$, to istnieją słabe rozwiązania u_n tego problemu oraz $u_n \to u$ w $H^1(D)$, gdy $n \to \infty$, gdzie u jest rozwiązaniem problemu Dirichleta

$$-Lu + \lambda u = f \quad \text{w } D, \qquad u = g \quad \text{na } \partial D.$$

Gdy $f \in L^p(D)$ z $p > d$ i $g \in H^1(D) \cap C(\partial D)$, to u_n, u posiadają wersje ciągłe i powstaje naturalne pytanie, czy $u_n \to u$ punktowo. Jest tak istotnie. W komunikacie naszkicujemy prosty, probabilistyczny dowód tego faktu.

Komunikat oparty będzie na pracy [2].

[1] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, *Springer-Verlag*, 1984
[2] A. Rozkosz, L. Słomiński, On approximation of a Dirichlet problem for divergence form operator by Robin problems, *preprint*, ArXiv:2205:08396

Model dynamiki układu odpornościowego

Ryszard Rudnicki
Instytut Matematyczny PAN
e-mail: rudnicki@us.edu.pl

Status immunologiczny jest stężeniem specyficznych przeciwciał, które pojawiają się po zakażeniu patogenem i pozostają w surowicy, zapewniając ochronę przed kolejnymi atakami tego samego patogenu. Z czasem liczba przeciwciał maleje aż do następnej infekcji. Podczas walki z chorobą odporność jest wzmocniona, a następnie odporność stopniowo słabnie itd. Gęstości stężeń przeciwciał opisana jest niemarkowskim procesem stochastyczny [1]. Przedstawimy w jaki sposób można badać asymptotyka długoczasowa jego rozkładów. Przeanalizujemy również szczególne przypadki tego modelu, przy progowym stężeniu przeciwciał przy ponownym zakażeniu oraz przy infekcjach sezonowych

[1] K. Pichór, R. Rudnicki, Asymptotic properties of a general model of immune status, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2023, 83, 172–193

Wycena opcji o wypukłej funkcji wypłaty na niezupełnym rynku finansowym

Agnieszka Rygiel
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
e-mail: agnieszka.rygiel@uek.krakow.pl

Klasycznym podejściem do wyceny instrumentów nieosiągalnych, dla których nie jest możliwe pełne zabezpieczenie, jest znalezienie najtańszej strategii super-replikującej. Jednak koszt strategii, której wartość w chwili końcowej jest zmienną losową o wartościach nie mniejszych niż wypłata wycenianego instrumentu, może być zbyt wysoki. W ramach referatu zostaną omówione warunki, przy których problem super-replikacji redukuje się do wyceny w modelu dwumianowym.

Zliczanie małych grafów w hipergrafach losowych

Grzegorz Serafin
Politechnika Wrocławska
e-mail: grzegorz.serafin@pwr.edu.pl

Niech N_n będzie ciągiem zmiennych losowych określających liczbę izomorficznych kopii ustalonego hipergrafu w hipegrafie losowym, który jest naturalnym rozszerzeniem modelu Erdösa–Rényi'ego. W trakcie referatu omówiona zostanie asymptotyczna normalność ciągu zmiennych losowych

$$\widetilde{N}_n := \frac{N_n - \mathbf{E}[N_n]}{\mathrm{Var}[N_n]}.$$

W szczekólności pokażemy jej zależność od czwartych momentów tych zmiennych.

Równanie Skorochoda z odbiciem i problem Neumanna dla równań z operatorem typu Lévy'ego

Leszek Słomiński
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
e-mail: leszeks@mat.umk.pl

Opowiemy o ostatnio uzyskanych wynikach dotyczących problemu Neumanna dla liniowych równań eliptycznych z operatorem typu Lévy'ego. Pokażemy, że rozwiązanie lepkościowe takiego problemu posiada reprezentację stochastyczną zadaną jawnym wzorem w terminach rozwiązania równania Skorochoda z odbiciem związanego z rozważanym operatorem. W zastosowaniu podamy pewne wyniki na temat stabilności rozwiązań lepkościowych oraz pokażemy, że rozwiązania tego typu są granicami rozwiązań odpowiednich równań ze składnikami penalizującymi. Podstawowymi elementami dowodu są nowe twierdzenia graniczne dla rozwiązań równań ze składnikami penalizującymi ze skokami. Referat będzie oparty na pracy [1].

[1] A. Rozkosz, L. Słomiński, Reflected Skorokhod equations and the Neumann boundary value problem for elliptic equations with Lévy-type operators, *preprint*, ArXiv:2303.12664

Równanie Bellmana dla problemu wrażliwego na ryzyko na długim horyzoncie czasowym

Łukasz Stettner
Instytut Matematyczny PAN
e-mail: stettner@impan.pl

Dla sterowanego procesu Markowa (X_n) na lokalnie zwartej przestrzeni stanów, z operatorem prawdopodobnieństw przejścia $P^{a_n}(X_n,\cdot)$ w chwili n, gdzie a_n jest sterowaniem ze zbioru zwartego U adaptowalnym do dostępnej informacji w chwili n, rozpatrujemy funkcjonał

$$\frac{1}{n}\ln\left(E_x^{(a_i)}\left[\exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} c(X_i,a_i)\right)\right]\right),$$

przy n dążącym do nieskończoności. Problemem jest maksymalizacja lub minimalizacja tego funkcjonału. Sprowadza się to do pokazania istnienia rozwiązania odpowiedniego równania Bellmana. Ten problem był badany między innymi w pracach [1] i [2]. Przedstawione będzie nowe podejście z pracy [3], które opiera się rozwiązaniu problemu w zwartej kuli z zastosowaniem twierdzenia Kreina Rutmana dla obciętego do kuli procesu Markowa i potem przejściu do granicy z promieniem kuli.

[1] G. B. Di Masi, Ł. Stettner, Risk sensitive control of discrete time Markov processes with infinite horizon, *SIAM J. Control Optimiz.*, 2000, 38, 61-78
[2] G. B. Di Masi, Ł. Stettner, Infinite horizon risk sensitive control of discrete time Markov processes under minorization property , *SIAM J. Control Optimiz.*, 2007, 46, 231-352
[3] Ł. Stettner, Discrete time risk sensitive control problem, *preprint*,

Opcje amerykańskie z losowym ograniczeniem terminu zapadalności

Paweł Stępniak
Politechnika Wrocławska
e-mail: pawel.stepniak@pwr.edu.pl

Podczas prelekcji zaprezentuję analityczne oraz numeryczne wyniki analizy wybranych rodzajów opcji amerykańskich z losowym ograniczeniem nałożonym na termin zapadalności. W szczególności rozważę instrumenty zatrzymywane w momencie gdy cena instrumentu podstawowego spadnie o określony poziom w stosunku do historycznego maksimum oraz opcje z ograniczeniem czasowym będącym ostatnim momentem przekroczenia ustalonej ceny instrumentu podstawowego. W swojej pracy rozważam geometryczny spektralnie ujemny proces Lévy'ego do modelowania ceny instrumentu bazowego. W części numerycznej przedstawię zmodyfikowaną metodę LSMC, odpowiednią do wyceny tego typu kontraktów. Prelekcja oparta będzie o wyniki uzyskane z Z. Palmowskim.

Profesor Ciesielski i jego matematyka

Tomasz Szarek
Instytut Matematyki Stosowanej PG
i Instytut Matematyczny PAN
e-mail: tszarek@impan.pl

W czasie referatu opowiemy o wynikach z teorii prawdopodobieństwa i aproksymacji Profesora Zbigniewa Ciesielskiego (1934–2020).

Prawa wielkich liczb dla ciągów niestacjonarnych bez tempa mieszania

Zbigniew S. Szewczak
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
e-mail: zssz@mat.umk.pl

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych oraz

$$\psi_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup\{|\frac{P(A\cap B)}{P(A)P(B)} - 1|;\ P(A)P(B) > 0,\ A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{n+k}^\infty\};$$

$$\varphi_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup\{|P(B\,|\,A) - P(B)|;\ P(A) > 0,\ A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{n+k}^\infty\},$$

gdzie $\mathcal{F}_k^m$ jest σ–algebrą generowaną przez $X_k, X_{k+1}, \ldots, X_m$, $m \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Ciąg $\{X_k\}$ jest φ–mieszającym (ψ–mieszającym) jeżeli $\varphi_n \to_n 0$ ($\psi_n \to_n 0$)[2].

Omówione zostaną uogólnienia mocnego prawa wielkich liczb z [1], [4] oraz relatywnej stabilności z [3]. Nie zakładamy przy tym jakiegokolwiek tempa mieszania oraz ścisłej stacjonarności i quasi-ortogonalności (tzn. $\mathrm{Var}(\sum_{k\in I} X_k) \leqslant C\sum_{k\in I}\mathrm{Var}(X_k)$). Jako zastosowanie uzyskamy ważoną relatywną stabilność prawie na pewno dla klasy ciągów ψ-mieszających (w tym uogólnionej gry petersburskiej).

[1] J. R. Blum, D. L. Hanson, L. H. Koopmans, On the Strong Law of Large Numbers for a Class of Stochastic Processes, *Z. Wahr. verw. Gebiete*, 1963, 2, 1–11
[2] R. C. Bradley, Introduction to Strong Mixing Conditions, *Kendrick Press*, 2007
[3] Z. S. Szewczak, Relative stability for strictly stationary sequences, *J. Multivariate Anal.*, 2001, 78(2), 235–251
[4] R. Wittmann, An application of Rosenthal's moment inequality the Strong Law of Large Numbers, *Statist. Probab. Lett.*, 1985, 3, 131–133

Ergodyczność dyskretnych półgrup Feynmana–Kaca

Mateusz Śliwiński
Politechnika Wrocławska
e-mail: mateusz.sliwinski@pwr.edu.pl

Przedstawimy krótko najnowsze wyniki badań nad półgrupami Feynmana–Kaca, zdefiniowanymi dla dyskretnego czasu i przestrzeni przeliczalnie nieskończonych. Zaprezentujemy związki między kontraktywnością dyskretnej półgrupy F–K a jej quasi-ergodycznością, a także ergodycznością tzw. półgrupy stowarzyszonej. Przedstawione rezultaty pochodzą z pracy prowadzonej wspólnie z Wojciechem Cyganem, Kamilem Kaletą oraz René Schillingiem.

[1] W. Cygan, K. Kaleta, M. Śliwiński, Decay of harmonic functions for discrete time Feynman– Kac operators with confining potentials, *ALEA*, 2022, 19, 1071–1101
[2] W. Cygan, K. Kaleta, R. Schilling, M. Śliwiński, Kernel estimates for discrete Feynman–Kac operators, *preprint*, 2023

Randomly switching evolution equations

Andrzej Tomski
University of Silesia in Katowice
e-mail: andrzej.tomski@us.edu.pl

We are considering a class of models in which randomly occurring environmental disturbances simultaneously affect all individuals. Examining this from the perspective of the entire population leads us to study an infinite-dimensional space of states representing the population density. Investigating the appropriate equations for the evolution of the density poses many interesting questions, and literature presents results in the form of determining moment equations for randomly perturbed diffusion processes. We have extended these results to a wider class of processes described by stochastic semigroups with random switching and we have investigated their long-time behavior.

[1] P. Klimasara, M.C. Mackey, A. Tomski, M. Tyran-Kamińska, Randomly switching evolution equations, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, 39

Wieloskalowe hybrydowe indywidualne modele stochastyczne

Radosław Wieczorek
Uniwersytet Śląski w Katowicach
e-mail: radoslaw.wieczorek@us.edu.pl

Indywidualne modele stochastyczne, albo inaczej: stochastyczne modele cząsteczkowe, są częstym narzędziem badawczym w wielu dziedzinach współczesnej nauki, zwłaszcza biologii i chemii. Interesującym zagadnieniem zarówno matematycznie, jak i z punktu wedzenia zastosowań, jest zbieżność takich procesów przy dużej liczbie cząstek do różnych opisów makroskopowych .

Referat dotyczył będzie sytuacji wielu (dwóch) skal, w której jedna populacja komórek badź cząsteczek jest na tyle liczna, że można stosować do niej przybliżenie makroskopowe, a druga na tyle nieliczna, że warto opisywać ją modelem cząsteczkowym. Prowadzi to do modeli zwanych hybrydowymi, w których stochastyczne modele cząsteczkowe sprzężone są z równanimi różniczkowymi cząstkowymi. W referacie opowiem konstrukcji takich modeli oraz o różnych możliwych przejściach granicznych pomiędzy tego typu modelami.

[1] V. Capasso, R. Wieczorek, A hybrid stochastic model of retinal angiogenesis, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, **43**(18) 10578–10592.

[2] R. Wieczorek, Hydrodynamic limit of a stochastic model of proliferating cells with chemotaxis, *Kinetic and Related Models*, 2023, **16**(3) 373–393.

[3] R. Wieczorek, Multiscale reaction-diffusion stochastic particle models, *in preparation*,

Centralne twierdzenie graniczne dla procesów Markowa wykładniczo ergodycznych w normie Fortet–Mouriera

Hanna Wojewódka-Ściążko
Institute of Mathematics, University of Silesia in Katowice
Institute of Theoretical and Applied Informatics, Polish Academy of Sciences
e-mail: hanna.wojewodka@us.edu.pl

W ramach referatu przedstawimy pewną wersję centralnego twierdzenia granicznego (CTG) dla niestacjonarnego i prawostronnie ciągłego procesu Markowa $\Psi := \{\Psi(t)\}_{t\geqslant 0}$ na polskiej przestrzeni fazowej, o półgrupie przejścia $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$. Dokładniej mówiąc, sformułujemy warunki na $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$, przy których rozpatrywany proces Ψ posiada dokładnie jeden rozkład stacjonarny μ_*, a ponadto, dla dowolnej ograniczonej funkcji lipschitzowskiej $g : E \to \mathbb{R}$, takiej że $\int_E g\, d\mu_* = 0$, zachodzi zbieżność

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t g(\Psi(s))ds \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{gdy} \quad t \to \infty.$$

Nasze kryterium (por. [1]) odnosi się do półgrupy fellerowskiej, wykładniczo mieszającej względem normy Fortet–Mouriera i spełniającej pewną własność typu Lapunowa. Mianowice, zakładamy, że

(i) $P(t)f$, $t \geqslant 0$, jest funkcją ciągłą dla każdej ciągłej i ograniczonej $f : E \to \mathbb{R}$,

oraz dla pewnej ciągłej funkcji $V : E \to [0, \infty)$ zachodzą warunki:

(ii) istnieją stałe $\beta, \gamma > 0$, takie że

$$d_{\mathrm{FM}}\left(\mu P(t), \nu P(t)\right) \leqslant \beta e^{-\gamma t} \left(\int_E V\, d\mu + \int_E V\, d\nu + 1 \right)$$

dla wszystkich $t \geqslant 0$ oraz $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(E)$,

(iii) istnieją stałe $A, B \geqslant 0$ oraz $\Gamma > 0$, takie że

$$P(t)V^2 \leqslant Ae^{-\Gamma t}V^2 + B \quad \text{dla wszystkich} \quad t \geqslant 0.$$

Inspiracją do wykazania omówionego wyżej wyniku (por. [1]) była niemożność zastosowania twierdzenia 7.2 z pracy [3] T. Komorowskiego i A. Walczuk dla adaptacji CTG do pewnej ogólnej klasy kawałkami deterministycznych procesów Markowa, stanowiącej przedmiot naszych ostatnich badań (zob. np. [2]). Problematyczne okazało się wykazanie własności ergodycznego mieszania w sensie rozpatrywanym w pracy [2], czyli warunku

(ii') istniają stałe $\beta, \gamma > 0$, takie że

$$d_{\mathrm{W}}\left(\mu P(t), \nu P(t)\right) \leqslant \beta e^{-\gamma t} d_{\mathrm{W}}\left(\mu, \nu\right)$$

dla wszystkich $t \geqslant 0$ oraz $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(E)$,

wymagającego de facto lipschitzowskości każdego z operatorów $P(t)$ względem normy Wassersteina. Tego typu warunek (gdzie prawa strona oszacowania zależy od odległości między rozkładami początkowymi) jest często znacznie trudniejszy do uzyskania, np. za pomocą techniki asymptotycznego sprzęgania procesów (stanowiącej jedno z najważniejszych narzędzi przy formułowaniu warunków zapewniających ergodyczność, por. [3,4]), niżeli zaproponowany przez nas warunek (ii).

[1] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściązko, The central limit theorem for Markov processes that are exponentially ergodic in the bounded-Lipschitz norm, *preprint*, ArXiv:2210.11963, 2022.
[2] T. Komorowski, A. Walczuk, Central limit theorem for Markov processes with spectral gap in the Wasserstein metric, *Stochastic Processes and their Applications*, 2012, 122(5), 2155–2184.
[3] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściązko, Exponential ergodicity in the bounded-Lipschitz distance for a subclass of piecewise-deterministic Markov processes with random switching between flows, *Nonlinear Analysis* , 2022, 25, 112678.
[4] B. Cloez, M. Hairer, Exponential ergodicity for Markov processes with random switching, *Bernoulli*, 2015, 21(5), 505–536.

Łomnickiego aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa

Jerzy Zabczyk
Instytut Matematyczny PAN
e-mail: `zabczyk@impan.pl`

W referacie przedstawię główne elementy pracy Łomnickiego [1], w której zaproponował on aksjomatyzację rachunku prawdopodobieństwa opartą na teorii miary. Ma ona pewne cechy wspólne z aksjomatyzacją Kołmogorowa [2]. W publikacji [2] praca Łomnickiego jest cytowana.

[1] A. Łomnicki, Nouveaux fondements du calcule des probabilites, *Fundamenta Mathematicae* , 1923, 4, 34–71
[2] A.N.Kolmogorov, Grundbegriffe der Wahscheinlichkeitsrechnung, *Springer*, 1933

Generatory infinitezymalne kwadratowych harnessów

Agnieszka Zięba
Politechnika Warszawska
e-mail: `agnieszka.zieba2.dokt@pw.edu.pl`

Kwadratowy harness to proces stochastyczny $(X_t)_{t\geqslant 0}$, dla którego $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{s,u})$ jest funkcją liniową, a $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_t|\mathcal{F}_{s,u})$ funkcją kwadratową zmiennych X_s i X_u, gdzie $\mathcal{F}_{s,u}$ jest przeszło-przyszłą filtracją rozważanego procesu. Kwadratowe harnessy to typowo niejednorodne procesy Markowa, scharakteryzowane przez pięć stałych numerycznych.

W naszej pracy zajmujemy się szukaniem generatorów infinitezymalnych tych procesów. Zaproponowana przez nas metoda jest oparta na wprowadzeniu tzw. wielomianów stowarzyszonych [1] do struktury algebraicznej zaproponowanej w [2]. Podstawowym problemem jest znalezienie rozwiązania równania komutacyjnego w nieprzemiennej algebrze nieskończonych ciągów wielomianów. Połączenie wspomnianych dwóch metod pozwoliło na znalezienie postaci generatora infinitezymalnego w postaci całkowo-rożniczkowalnej w ogólnym przypadku.

Praca wspólna z prof. Jackiem Wesołowskim.

[1] W. Bryc, J. Wesołowski, Infinitesimal generators of q-Meixner processes, *Stoch. Proc. Appl.*, 2014, 124(1), 915–926
[2] W. Bryc, J. Wesołowski, Infinitesimal generators for a class of polynomial processes, *Studia Math.*, 2015, 229, 73–93