Szeregi Fouriera

Grzegorz Łysik

1. Motywacja szeregów Fouriera, równanie ciepła.

Rozważmy problem rozchodzenia się ciepła w pręcie o długości l. Temperatura pręta w punkcie x i w chwili t spełnia równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \qquad t > 0, \quad 0 < x < l. \tag{1}$$

Ponadto, dany jest rozkład temperatury w chwili $t = 0$

$$u(0,x) = f(x), \qquad 0 \le x \le l \tag{2}$$

oraz końce pręta mają zerową temperaturę (fizycznie oznacza to, że są one zanurzone w topniejącym śniegu)

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \qquad t \ge 0. \tag{3}$$

Zauważmy, że aby warunek (2) był zgodny z (3) trzeba założyć, że $f(0) = f(l) = 0$. W celu rozwiązania powyższego zagadnienia zastosujemy pochodzącą od Fouriera metodę rozdzielania zmiennych. Mianowicie szukamy rozwiązania w postaci iloczynu funkcji zmiennej t i funkcji zmiennej x

$$u(t,x) = F(t) \cdot G(x). \tag{4}$$

Wstawiając (4) do (1) dostajemy

$$F'(t) \cdot G(x) = F(t) \cdot G''(x)$$

lub

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}.$$

Ponieważ po lewej stronie ostatniego równania występuje funkcja zależna tylko od zmiennej t, natomiast po prawej funkcja zależna tylko od x więc obie te funkcje muszą być równe pewnej stałej λ. Czyli zachodzi

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \lambda = \frac{G''(x)}{G(x)}. \tag{5}$$

Drugie z powyższych równań można zapisać w postaci

$$G''(x) - \lambda G(x) = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, którego rozwiązaniem ogólnym jest

$$G(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{jeśli } \lambda > 0, \\ a\cos\sqrt{-\lambda}x + b\sin\sqrt{-\lambda}x & \text{jeśli } \lambda < 0, \\ a + bx & \text{jeśli } \lambda = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Lecz funkcja $u(t,x)$ spełnia warunek brzegowy (3). Zatem musi zachodzić

$$G(0) = G(l) = 0.$$

Stąd dostajemy

$$a = b = 0 \quad \text{jeśli} \quad \lambda \geq 0 \quad \text{lub} \quad \lambda \notin \{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N}\};$$

$$a = 0, \quad b \quad - \text{ dowolne,} \quad \text{jeśli} \quad \lambda = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wówczas dla $\lambda = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N}$ mamy

$$G(x) = b_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

przy czym b_k jest dowolną stałą rzeczywista. Powracamy teraz do pierwszego równania równania w (5), które przy założeniu, że $\lambda = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N}$, można zapisać w postaci

$$F'(t) = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2} \cdot F(t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jego rozwiązaniem jest

$$F(t) = \exp\{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2} \cdot t\}.$$

Zatem dla każdego $k \in \mathbb{N}$ dostaliśmy rozwiązanie równania (1) spełniające warunek (3) w postaci

$$u_k(t,x) = b_k \exp\{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2}t\} \cdot \sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Ponieważ równanie (1) jest liniowe więc suma tych rozwiązań

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp\{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2}t\} \cdot \sin\frac{\pi k}{l}x \tag{7}$$

jest też rozwiązaniem (1), o ile powyższy szereg jest zbieżny. Musimy jeszcze uwzględnić warunek początkowy (2). Wstawiając w (7) $t = 0$ dostajemy

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k}{l}x = f(x).$$

Zatem (6) jest rozwiązaniem problemu (1)+(2)+(3) o ile współczynniki $b_k, k \in \mathbb{N}$ spełniają równość

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k}{l} x = f(x). \tag{8}$$

Równość ta oznacza, że funkcja f wyraża się poprzez szereg sinusów. Jeśli warunek (3) zastąpimy warunkiem

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \tag{3'}$$

to dla rozwiązania problemu (1)+(2)+(3′) dostaniemy równość

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{l} x = f(x), \tag{8'}$$

która oznacza, że funkcja f wyraża się poprzez szereg cosinusów.
Ostatecznie, jeśli zamiast warunku (3) zażądamy, aby oba końce pręta miały taką samą temperaturę (fizycznie można, to osiągnąć łącząc końce pręta) czyli, że zachodzi

$$u(t,0) = u(t,l) \tag{3''}$$

to dla rozwiązania problemu (1)+(2)+(3″) dostaniemy równość

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(a_k \cos \frac{\pi k}{l} x + b_k \sin \frac{\pi k}{l} x \Big) = f(x). \tag{8''}$$

Powyższy szereg nazywamy szeregiem Fouriera funkcji f.

Zatem, aby rozwiązać problem propagacji ciepła w pręcie, musimy zbadać czy dana funkcja f określona na przedziale $(0,l)$ może być przedstawiona w postaci szeregu sinusów (8), cosinusów (8′) lub w postaci szeregu Fouriera (8″). Zauważmy, że szeregi sinusów i cosinusów są szczególnymi przypadkami szeregu Fouriera.

2. Szeregi Fouriera.

Szeregi Fouriera są podstawowym narzędziem służącym do badania funkcji okresowych, które z kolei występują jako rozwiązania wielu problemów fizyki matematycznej.

Definicja. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lub $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Mówimy, że funkcja f jest okresowa o okresie $p > 0$ jeśli

$$f(x+p) = f(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli p jest okresem funkcji okresowej f, to $kp, k \in \mathbb{N}$ jest też jej okresem.

Definicja. Okresem podstawowym funkcji okresowej nazywamy najmniejszy dodatni okres danej funkcji o ile on istnieje.

Przykład 1. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie ma okresu podstawowego.

Lemat 1. *Jeśli f jest funkcją ciągłą na pewnym przedziale, okresową, nie równą tożsamościowo stałej, to jej okres podstawowy istnieje.*

Dowód. Niech $\{p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_n \geq ...\}$ będzie nierosnącym ciągiem okresów funkcji f. Wykażemy, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $p_n = p_m$ dla $m \geq n$. Załóżmy, że tak nie jest. Wówczas, przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy założyć, że $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ściśle malejącym ciągiem okresów tzn. $\{p_1 > p_2 > ... > p_n > ...\}$. Zauważmy, że jeśli p, q są okresami funkcji f przy czym $p > q$, to $p - q$ też jest jej okresem. Istotnie

$$f(x + p - q) = f(x + p - q + q) = f(x + p) = f(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem ponieważ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} p_n = q \geq 0$$

funkcja f ma okresy dowolnie małe. Niech x należy do przedziału I, na którym f jest ciągła. Wówczas $f(x) = f(x_n)$ dla pewnego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gęstego w przedziale I. Ponieważ f jest ciągła na I, więc jest ona stała na I. Wynika stąd, że f jest tożsamościowo stała na $\mathbb{R}$, co jest sprzeczne z założeniem. $\diamondsuit$.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że rozpatrywane funkcje mają okres 2π. Nie zmniejsza to ogólności rozważań, gdyż jeśli funkcja g ma okres $p, p > 0$, to $f(x) = g(\frac{px}{2\pi})$ ma okres 2π i na odwrót. Istotnie

$$f(x + 2\pi) = g\big(\frac{p}{2\pi}(x + 2\pi)\big) = g\big(\frac{px}{2\pi} + p\big) = g\big(\frac{px}{2\pi}\big) = f(x).$$

Zauważmy, że funkcje okresowe o okresie 2π można traktować jako funkcje określone na okręgu S^1. Podstawowymi przykładami funkcji okresowych o okresie 2π są funkcje trygonometryczne.

Definicja. Układem trygonometrycznym nazywamy zbiór funkcji

$$\{\sin nx, \cos nx\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...\}.$$

Lemat 2. *Układ trygonometryczny spełnia warunki ortogonalności*

(*a*)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \qquad n \in \mathbb{N};$$

(*b*)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0, \qquad n, m \in \mathbb{N};$$

$$(c) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & \textit{jeśli} \quad n \neq m, \\ \pi & \textit{jeśli} \quad n = m, \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{N};$$

$$(d) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & \textit{jeśli} \quad n \neq m, \\ \pi & \textit{jeśli} \quad n = m \neq 0, \\ 2\pi & \textit{jeśli} \quad n = m = 0, \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{N}_0;$$

Dowód. Wzór (a) jest oczywisty, natomiast wzory (b), (c) i (d) wynikają za związków

$$\begin{aligned} \sin\varphi \sin\theta &= \frac{1}{2}\cos(\varphi - \theta) - \frac{1}{2}\cos(\varphi + \theta), \\ \sin\varphi \cos\theta &= \frac{1}{2}\sin(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}\sin(\varphi + \theta), \\ \cos\varphi \cos\theta &= \frac{1}{2}\cos(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}\cos(\varphi + \theta). \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Podstawowa idea leżąca u podstaw teorii szeregów Fouriera polega na użyciu powyższych związków ortogonalności w celu wyrażenia dowolnej funkcji f okresowej o okresie 2π poprzez nieskończony szereg sinusów i cosinusów tzn.

$$(9) \qquad f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(A_m \cos mx + B_m \sin mx \Big).$$

We wzorze tym symbol $\sim$ oznacza odpowiedniość. Będziemy mogli go zastąpić przez równość jeśli wykażemy, że szereg po prawej stronie (9) jest rzeczywiście zbieżny do $f(x)$.

W celu wyznaczenia współczynników $A_n, n \in \mathbb{N}_0$ pomnóżmy obie strony (9) przez $\cos nx$, a następnie przecałkujmy obie strony po przedziale $[-\pi\pi]$. Korzystając ze związków ortogonalności dostajemy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \sim {} & \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(A_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + B_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \Big) \\ & = \pi A_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Podobnie mnożąc przez $\sin nx$, całkując po $[-\pi, \pi]$ i korzystając ze związków ortogonalności dostajemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \sim \pi B_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Definicja. Współczynnikami Fouriera funkcji okresowej f o okresie 2π nazywamy liczby

$$(10) \qquad \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad n = 0, 1, ... \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \qquad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Współczynniki Fouriera są określone o ile powyższe całki są skończone. Wystarczy więc założyć, że funkcja f jest całkowalna na przedziale $[-\pi,\pi]$ czyli, że $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Warto zauważyć, że jeśli f jest parzysta (tzn. $f(-x)=f(x)$), to $B_n=0$ dla $n\in\mathbb{N}$ oraz jeśli f jest nieparzysta (tzn. $f(-x)=-f(x)$), to $A_n=0$ dla $n\in\mathbb{N}_0$.

Przykład 2. Niech f będzie okresowa o okresie 2π oraz

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } 0\le x\le\pi,\\ -1 & \text{dla } -\pi<x<0.\end{cases}$$

Wówczas $A_n=0$ dla $n\in\mathbb{N}_0$ oraz

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx=\begin{cases}0 & \text{gdy } n\in 2\mathbb{N},\\ \frac{4}{\pi n} & \text{gdy } n\in 2\mathbb{N}_0+1.\end{cases}$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\\ &\sim \frac{4}{\pi}\Big(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...\Big).\end{aligned}$$

Zadanie. Wyznaczyć współczynniki Fouriera funkcji f okresowej o okresie 2π jeśli
(a) $f(x)=|x|$ dla $x\in(-\pi,\pi]$,
(b) $f(x)=x^2$ dla $x\in(-\pi,\pi]$.

Szeregi Fouriera wyraża się często w postaci szeregów funkcji eksponencjalnych zamiast szeregów sinusów i cosinusów. W celu ich wprowadzenia przypomnijmy wzór Eulera

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \quad \text{dla} \quad \varphi\in\mathbb{R}.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{2}\big(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\big),\\ \sin\varphi &= \frac{-i}{2}\big(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\big).\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos nx+B_n\sin nx\Big)\\ &\sim \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{A_n-iB_n}{2}e^{inx}+\frac{A_n+iB_n}{2}e^{-inx}\Big) \qquad (11)\\ &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\end{aligned}$$

gdzie

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_n = \begin{cases} (A_n - iB_n)/2 & \text{dla } \; n \in \mathbb{N}, \\ (A_{-n} + iB_{-n})/2 & \text{dla } \; n \in -\mathbb{N}. \end{cases}$$

Korzystając z (10) dostajemy

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Zatem jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to $c_{-n} = \overline{c_n}$, dla $n \in \mathbb{Z}$. Zauważmy jeszcze, że funkcje eksponencjalne spełniają następujący związek ortogonalności:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{inx} dx = \delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = n, \\ 0 & \text{gdy } m \neq m. \end{cases} \tag{13}$$

Na zakończenie tego punktu wykażemy, że współczynniki Fouriera spełniają następującą nierówność.

Lemat 3 (Nierówności Bessela). *Jeśli f jest funkcją okresową o okresie 2π oraz $f \in L^1 \cap L^2([-\pi, \pi])$, to jej współczynniki Fouriera c_n spełniają nierówność*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx, \tag{14}$$

natomiast współczynniki A_n, B_n spełniają

$$\frac{1}{4}|A_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|A_n|^2 + |B_n|^2 \right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \tag{15}$$

Dowód. Dla ustalonego $N \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-inx}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - S_N(x) \big)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_N^2(x) dx. \end{aligned}$$

Ale wobec definicji S_N oraz (12)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) dx = \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} c_n^2$$

oraz wobec związków ortogonalności (13)

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_N^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-inx} \Big)\Big(\sum_{m=-N}^{N} c_m e^{-imx} \Big) dx$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} c_n c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{-imx} dx = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} c_n^2.$$

Zatem

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - S_N(x)\big)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} c_n^2.$$

Ponieważ $N \in \mathbb{N}$ było dowolne dostajemy (14).
W celu uzasadnienia nierówności (15) wystarczy zauważyć, że

$$|A_0|^2 = 4|c_0|^2 \quad \text{oraz} \quad |A_n|^2 + |B_n|^2 = 2\big(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\big) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \diamondsuit$$

Wniosek 1. Jeśli $f \in L^1 \cap L^2([-\pi, \pi])$, to szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^2$ oraz $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ są zbieżne.

3. Zbieżność punktowa szeregów Fouriera.

Do tej pory określiliśmy odpowiedniość pomiędzy funkcjami okresowymi o okresie 2π, a ich szeregami Fouriera. Naturalnym pytaniem jest czy otrzymane szeregi są zbieżne oraz jeśli tak to w jakim sensie i jaki jest związek ich granicy z wyjściową funkcją.

Definicja. (Zbieżność punktowa funkcji.) Niech będzie dany ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji określonych w otoczeniu punktu $\mathring{x} \in \mathbb{R}$. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny punktowo w punkcie $\mathring{x}$ jeśli jest zbieżny szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\mathring{x})$. W przeciwnym wypadku, mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest rozbieżny w $\mathring{x}$.

Przykłady.
3. Szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest zbieżny punktowo w $\mathring{x}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathring{x}| < 1$.
4. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ jest zbieżny punktowo dla każdego $\mathring{x} \in \mathbb{R}$.
5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ jest rozbieżny dla $\mathring{x} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Później przekonamy się, że jest on zbieżny dla pozostałych wartości $\mathring{x}$.

Okazuje się, że istnieją funkcje okresowe ciągłe, dla których szereg Fouriera jest rozbieżny w gęstym zbiorze punktów $\mathring{x}$, a nawet takie, dla których jest on rozbieżny dla każdego $\mathring{x} \in \mathbb{R}$. Tym nie mniej dla szerokiej klasy funkcji ich szeregi Fouriera są zbieżne. Taką klasą funkcji są funkcje kawałkami zbieżne.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma nieciągłość skokową w punkcie $\mathring{x}$ jeśli istnieją granice jednostronne

$$\lim_{x\to\mathring{x}, x<\mathring{x}} f(x) =: f(\mathring{x}^-), \qquad \lim_{x\to\mathring{x}, x>\mathring{x}} f(x) =: f(\mathring{x}^+)$$

lecz $f(\mathring{x}^-) \neq f(\mathring{x}^+)$.

Uwaga. Jeśli granice jednostronne istnieją i są sobie równe, to po przedefiniowaniu wartości funkcji funkcji w $\mathring{x}$ otrzymamy funkcję ciągłą w $\mathring{x}$.

Przykład 6. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Wówczas f jest nieciągła w 0 lecz ponieważ $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0, x>0} f(x)$, więc kładąc $f(0) = 1$ zamiast $f(0) = 0$ dostajemy funkcję ciągłą.

Definicja. Mówimy, że funkcja f jest kawałkami ciągła w ograniczonym przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jeśli jest ona ciągła poza skończoną ilością punktów, w których ma ona skokowe nieciągłości oraz jeśli istnieją granice $\lim_{x\to a} f(x)$ i $\lim_{x\to b} f(x)$.
Mówimy, że funkcja f jest kawałkami gładka w ograniczonym przedziale (a, b) jeśli jest ona kawałkami ciągła w (a, b) oraz jej pochodna f' istnieje poza skończona liczbą punktów przedziału (a, b) i jest kawałkami ciągła.
Mówimy, że funkcja f jest kawałkami ciągła (odpowiednio kawałkami gładka) na $\mathbb{R}$ jeśli jest ona kawałkami ciągła (odpowiednio kawałkami gładka) na każdym ograniczonym przedziale.

Uwaga. Jeśli f i g są kawałkami ciągłe (gładkie) to $c_1 f + c_2 g$ oraz fg są też kawałkami ciągłe (gładkie).

Możemy teraz sformułować twierdzenie o zbieżności punktowej szeregów Fouriera.

Twierdzenie 1. *Jeśli f jest funkcją okresową o okresie 2π, kawałkami gładką na $\mathbb{R}$, to jej szereg Fouriera jest zbieżny punktowo dla każdego $x \in \mathbb{R}$ przy czym*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos nx + B_n \sin nx\big) = \begin{cases} f(x) & \textit{jeśli } f \textit{ jest ciągła w } x, \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & \textit{jeśli } f \textit{ jest nieciągła w } x. \end{cases} \tag{16}$$

Dowód. Oznaczmy przez $S_N f(x)$, N-tą sumę częściową szeregu Fouriera funkcji f

$$S_N f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(A_n \cos nx + B_n \sin nx\big) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Naszym celem jest wykazanie, że $S_N f(x)$ jest zbieżne do $\big(f(x^-) + f(x^+)\big)/2$ gdy $N \to \infty$. Ponieważ

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy,$$

więc

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(y-x)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x+\xi) e^{in\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi) e^{in\xi} d\xi,
\end{aligned}$$

gdyż całka funkcji okresowej po odcinku długości pełnego okresu nie zależy od położenia tego odcinka. Zatem

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi) D_N(\xi) d\xi, \tag{17}$$

gdzie

$$D_N(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\xi} \tag{18}$$

jest jądrem Dirichleta. Przedstawimy teraz jądro Dirichleta w bardziej dogodnej postaci.

$$\begin{aligned}
D_N(\xi) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iN\xi} \sum_{k=0}^{2N} e^{ik\xi} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-iN\xi} \frac{e^{i(2N+1)\xi} - 1}{e^{i\xi} - 1} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)\xi} - e^{-iN\xi}}{e^{i\xi} - 1} \cdot \frac{e^{-i\xi/2}}{e^{-i\xi/2}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+1/2)\xi}{\sin \xi/2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Postać ta umożliwia naszkicowanie wykresu jądra Dirichleta D_N. Zauważmy również, że ze wzoru (18) dostajemy

$$D_N(\xi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(e^{-in\xi} + e^{in\xi} \right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \cos n\xi.$$

Stąd

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\xi) d\xi = \int_{0}^{\pi} D_N(\xi) d\xi = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\frac{1}{2}f(x^-) = f(x^-)\int_{-\pi}^{0} D_N(\xi)d\xi, \qquad \frac{1}{2}f(x^+) = f(x^+)\int_{0}^{\pi} D_N(\xi)d\xi$$

oraz wobec (17)

$$\begin{aligned} &S_N f(x) - \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} \\ &= \int_{-\pi}^{0} \big(f(x+\xi) - f(x^-)\big)D_N(\xi)d\xi + \int_{0}^{\pi} \big(f(x+\xi) - f(x^+)\big)D_N(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Naszym celem jest wykazanie, że ta wielkość dąży do zera gdy $N \to \infty$. Dzięki (19) możemy prawą stronę powyższego wyrażenia zapisać w postaci

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\Big(e^{i(N+1)\xi} - e^{-iN\xi}\Big)d\xi,$$

gdzie

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(x+\xi) - f(x^-)}{e^{i\xi}-1} & \text{dla } \ -\pi < \xi < 0, \\ \dfrac{f(x+\xi) - f(x^+)}{e^{i\xi}-1} & \text{dla } \ 0 < \xi < \pi. \end{cases}$$

Funkcja g ma taką samą klasę gładkości na odcinkach $(-\pi, 0)$ i $(0, \pi)$. Korzystając z reguły de l'Hospitala

$$\lim_{\xi\to 0^-} g(\xi) = \lim_{\xi\to 0^-} \frac{f'(x+\xi)}{ie^{i\xi}} = \frac{f'(x^-)}{i},$$

$$\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+} \frac{f'(x+\xi)}{ie^{i\xi}} = \frac{f'(x^+)}{i}.$$

Zatem g jest kawałkami ciągła na $[-\pi, \pi]$. Z Wniosku z nierówności Bessela wynika, że współczynniki Fouriera c_n funkcji g dążą do zera. Zatem

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\Big(e^{i(N+1)\xi} - e^{-iN\xi}\Big)d\xi = c_{-(N+1)} - c_N \to 0 \qquad \text{gdy } \ N \to \infty$$

co kończy dowód twierdzenia. $\diamondsuit$

Wniosek 2. Jeśli funkcje okresowe f i g o okresie 2π są kawałkami gładkie oraz mają takie same współczynniki Fouriera to $f = g$ poza punktami nieciągłości.

Powyższe twierdzenie umożliwia znalezienie sum pewnych szeregów liczbowych.

Przykłady.

7. Szeregiem Fouriera funkcji okresowej o okresie 2π takiej, że $f(x) = \operatorname{sgn} x$ dla $|x| < \pi$ jest

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Wstawiając $x = \pi/2$ na podstawie Twierdzenia 1 dostajemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

8. Szeregiem Fouriera funkcji okresowej o okresie 2π takiej, że $f(x) = |x|$ dla $|x| < \pi$ jest

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Wstawiając $x = 0$ dostajemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

9. Szeregiem Fouriera funkcji okresowej o okresie 2π takiej, że $f(x) = x^2$ dla $|x| < \pi$ jest

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Wstawiając $x = 0$ dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Wniosek 3. Korzystając z Przykładów 6 i 7 można policzyć wartość funkcji ζ-Riemanna w punkcie $\zeta = 2$.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Następne twierdzenie wiąże współczynniki Fouriera funkcji ze współczynnikami Fouriera jej pochodnej.

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że f jest okresowa o okresie 2π, ciągła i kawałkami gładka. Jeśli A_n, B_n i c_n są współczynnikami Fouriera f, to współczynnikami Fouriera jej pochodnej f' są*

$$A'_n = n \cdot B_n, \qquad B'_n = -n \cdot A_n, \qquad c'_n = in \cdot c_n. \tag{20}$$

Dowód. Jest jasne, że f' jest funkcją okresową, kawałkami ciągłą. Całkując przez części dostajemy dla $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \big(e^{-inx}\big)'_x dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = inc_n. \end{aligned}$$

Podobnie wykazujemy wzory $A_n' = n \cdot B_n$ i $B_n' = -n \cdot A_n$.

Z Twierdzeń 1 i 2 dostajemy

Wniosek 4. Jeśli f jest funkcją ciągłą o okresie 2π, kawałkami gładką oraz jej pochodna f' jest kawałkami gładka, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(nB_n \cos nx - nA_n \sin nx\big) = \begin{cases} f'(x) & \text{jeśli } f' \text{ jest ciągła w } x, \\ \dfrac{f'(x^-) + f'(x^+)}{2} & \text{jeśli } f' \text{ jest nieciągła w } x. \end{cases} \tag{21}$$

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że f jest funkcją kawałkami ciągła, okresową o okresie 2π. Jeśli $c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy = 0$, to funkcja*

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$

jest ciągła, kawałkami gładka, okresowa o okresie 2π oraz

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{A_n}{n} \sin nx - \frac{B_n}{n} \cos nx\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}, \end{aligned}$$

gdzie

$$C_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx.$$

Dowód. Jest jasne, że F jest funkcją ciągłą i kawałkami gładką. Ponadto, z założenia że $c_0 = 0$ wynika, że F jest funkcją okresową o okresie 2π gdyż

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy = 0.$$

Zatem na podstawie Twierdzenia 1, F jest sumą swojego szeregu Fouriera. Związki pomiędzy współczynnikami Fouriera f i F wynikają z Twierdzenia 2. $\diamondsuit$

4. Zbieżność jednostajna szeregów Fouriera.

W poprzednim rozdziale badaliśmy zbieżność punktową szeregów Fouriera. Faktycznie zbieżność punktowa jest zbieżnością słabą, gdyż daje niewielką informację o granicy. Aby uzyskać większą informację o granicy wprowadza się pojęcia zbieżności absolutnej i jednostajnej.

Definicja. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ zbieżny punktowo do funkcji $f(x)$ jest zbieżny absolutnie jeśli jest zbieżny punktowo szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Definicja. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze S jeśli

$$\sup_{x\in S} \left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| \to 0 \quad \text{gdy} \quad N \to \infty.$$

Przypomnijmy dwa twierdzenia z Analizy I.

Twierdzenie (Kryterium Weierstrassa). *Jeśli $|f_n(x)| \leq M_n$ dla $x \in S$ i $n \in \mathbb{N}$ oraz szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny absolutnie i jednostajnie na S.*

Twierdzenie. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie za zbiorze zwartym K, to jego granica jest funkcją ciągłą na K.*

Twierdzenie 4. *Jeśli f jest funkcją ciągłą, kawałkami gładką, okresową o okresie 2π, to jej szereg Fouriera jest zbieżny do f absolutnie i jednostajnie na $\mathbb{R}$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że warunek $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n| < \infty$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \infty$ jest równoważny z warunkiem $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Istotnie zachodzą nierówności $|A_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|, |B_n| \leq |c_n| + c_{-n}|$ i $|c_{\pm n}| \leq |A_n| + |B_n|$. Zatem wystarczy udowodnić twierdzenie dla szeregu Fouriera w postaci eksponencjalnej. Niech c_n będą współczynnikami Fouriera f, a c'_n współczynnikami Fouriera f'. Wówczas dla $n \neq 0$, $c_n = \frac{1}{in} c'_n$ oraz stosując nierówność Bessela dla f'

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx < \infty.$$

Następnie stosując nierówność Cauchy-Schwartza

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| &= |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{c'_n}{n}\right| \\ &\leq |c_0| + \Big(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\neq 0} |c'_n|^2\Big)^{1/2} < \infty,\end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. $\diamondsuit$

Twierdzenie 5. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $f \in C^{(k-1)}(\mathbb{R})$ oraz $f^{(k-1)}$ jest funkcją okresową, kawałkami gładką, to współczynniki Fouriera funkcji f spełniają*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n^k A_n|^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |n^k B_n|^2 < \infty \quad i \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n|^2 < \infty. \tag{22}$$

W szczególności $n^k A_n \to 0, n^k B_n \to 0$ gdy $n \to \infty$ i $n^k c_n \to 0$ gdy $n \to \pm\infty$.

Odwrotnie, jeśli współczynniki Fouriera funkcji f spełniają przy pewnym $\varepsilon > 0$

$$|n|^{k+\varepsilon} |c_n| < \infty \qquad dla \quad n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0$$

lub

$$n^{k+\varepsilon} \cdot \max\left(|A_n|, |B_n|\right) < \infty \qquad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

to f jest klasy $C^{(k-1)}(\mathbb{R})$.

Dowód. Stosując Twierdzenie 4 do funkcji $f^{(k)}$ dostajemy $c_n^{(k)} = (in)^k c_n$. Następnie korzystając z nierówności Bessela dostajemy pierwszą część twierdzenia. W celu udowodnienia drugiej części zauważmy, że dla $0 \leq j \leq k-1$

$$\sum_{n \neq 0} |n^j c_n| \leq C \sum_{n \neq 0} |n|^{j-k-\varepsilon} < \infty.$$

Zatem korzystając z kryterium Weierstrassa wnioskujemy, że szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n e^{inx}$$

jest zbieżny absolutnie i jednostajnie dla $j \leq k-1$. Zatem $f \in C^{(k-1)}(\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

5. Kryterium Abela.

Wielu przypadkach kryterium Weierstrassa nie można zastosować, pomimo, że szereg jest zbieżny jednostajnie. Typowym przykładem takiej sytuacji jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Zachodzi oszacowanie $\frac{|\cos nx|}{n} \leq 1/n$, lecz ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ jest rozbieżny (dlaczego?), więc nie można stosować kryterium Weierstrassa. Tym nie mniej powyższy szereg jest zbieżny jednostajnie na odcinkach nie zawierających całkowitej wielokrotności 2π. Można ten fakt wykazać stosując kryterium Abela. Przed jego sformułowaniem wprowadźmy definicje.

Definicja. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie ograniczony na zbiorze S, jeśli istnieje stała $M < \infty$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\Big| \leq M \qquad \text{dla} \quad x \in S.$$

Definicja. Ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy malejącym, jeśli

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots,$$

oraz malejącym do zera, jeśli ponadto

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Lemat 4 (Lemat Abela). *Załóżmy, że skończony ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=1}^N$ jest malejący oraz, że istnieją stałe $0 < m < M < \infty$ takie, że skończony ciąg $\{b_n\}_{n=1}^N$ spełnia*

$$m \leq b_1 + b_2 ... + b_N \leq M. \tag{23}$$

Wówczas

$$a_1 m \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_N b_N \leq a_1 M.$$

Dowód. Dla $k = 1, ..., M$ oznaczmy $S_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$. Wówczas

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_N b_N \\ = & \ a_1 S_1 + a_2 (S_2 - S_1) + ... + a_N (S_N - S_{N-1}) \\ = & \ (a_1 - a_2) S_1 + (a_2 - a_3) S_2 + ... + (a_{N-1} - a_N) S_{N-1} + a_N S_N \\ \geq & \ (a_1 - a_2) m + (a_2 - a_3) m + ... + (a_{N-1} - a_N) m + a_N m \\ = & \ a_1 m. \end{aligned}$$

Drugą nierówność udowadniamy analogicznie. $\diamondsuit$

Lemat 5. *Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ jest malejący oraz, że istnieją stałe $0 < m < M < \infty$ takie, że ciąg $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ spełnia dla każdego $N \in \mathbb{N}$ warunek (23). Wówczas, jeśli szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ jest zbieżny, to*

$$a_1 m \leq \sum_{n=1}^\infty a_n b_n \leq a_1 M,$$

oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\Big| \sum_{n=1}^\infty a_n b_n - \sum_{n=1}^N a_n b_n \Big| \leq a_{N+1}(M - m).$$

Dowód. Pierwsza nierówność jest wnioskiem z Lematu Abela po zastosowaniu przejścia granicznego $N \to \infty$. Aby uzasadnić drugą zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^\infty a_n b_n - \sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=N+1}^\infty a_n b_n.$$

Następnie, ponieważ dla każdego $p \in \mathbb{N}$ mamy

$$m \leq \sum_{n=1}^{N+p} b_n \leq M,$$

więc

$$m - M \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} b_n \leq M - m.$$

Zatem korzystając z pierwszej nierówności dostajemy

$$\Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n b_n \Big| \leq a_{N+1}(M-m). \qquad \diamondsuit$$

Lemat 6. *Jeśli ciąg* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest malejący do zera oraz istnieją stałe* $0 < m < M < \infty$ *takie, że ciąg* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *spełnia dla każdego* $N \in \mathbb{N}$ *warunek (23), to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

Dowód. Dla $k = 1, ..., M$ oznaczmy $S_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$. Wówczas dla $N \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n - a_N S_N = (a_1 - a_2) S_1 + ... + (a_{N-1} - a_N) S_N.$$

Jeśli $N \to \infty$, to suma po prawej stronie powyższego wzoru jest bezwzględnie zbieżna, gdyż wobec (23)

$$\begin{aligned} & |(a_1 - a_2) S_1| + ... + |(a_{N-1} - a_N) S_N| \\ \leq \ & (a_1 - a_2) M + ... + (a_{N-1} - a_N) M = (a_1 - a_N) M. \end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(a_n - a_{n+1}) S_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) M = a_1 M.$$

Zachodzi również

$$|a_N S_N| = a_N |S_N| \leq a_N M \to 0 \qquad \text{gdy} \quad N \to \infty.$$

Stąd dostajemy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) S_n. \qquad \diamondsuit$$

Twierdzenie 6 (Kryterium Abela). *Załóżmy, że sumy częściowe szeregu funkcyjnego* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *są jednostajnie ograniczone na odcinku* $I \subset \mathbb{R}$ *przez liczbę* $M < \infty$. *Wówczas, jeśli ciąg liczbowy* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *maleje monotonicznie do zera, to szereg funkcyjny* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ *jest zbieżny jednostajnie na* I.

Dowód. Ustalmy $\mathring{x} \in I$ i połóżmy $b_n = f_n(\mathring{x})$. Wówczas ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają założenia Lematu 6. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(\mathring{x})$ jest zbieżny oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(\mathring{x}) - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(\mathring{x}) \Big| \leq a_{N+1} \cdot 2M.$$

Ustalmy $\delta > 0$. Wówczas istnieje stała $N_0 \in \mathbb{N}$ taka, że $a_{N+1} \cdot 2M \leq \delta$ dla $N \geq \mathbb{N}_0$. Zatem dla $N \geq N_0$

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(\mathring{x}) - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(\mathring{x}) \Big| \leq \delta.$$

Ponieważ N_0 nie zależy od wyboru punktu $\mathring{x} \in I$ oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na I. $\diamondsuit$

Wniosek 4. Dla dowolnego przedziału domkniętego $I \subset (0, 2\pi)$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

jest zbieżny jednostajnie na I.

Dowód. Stosując wzór

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

dostajemy dla $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{x}{2} \big(\sin x + \sin 2x + ... + \sin Nx \big) \\ = & \ \big(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \big) + \big(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \big) + ... + \big(\cos \frac{(2N-1)x}{2} - \cos \frac{(2N+1)x}{2} \big) \\ = & \ \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2N+1)x}{2}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin Nx = \frac{\cos x/2 - \cos (2N+1)x/2}{2 \sin x/2}.$$

Zatem na zwartym odcinku $I \subset (0, 2\pi)$ zachodzi

$$\big| \sin x + \sin 2x + ... + \sin Nx \big| \leq 1 \sin x/2.$$

Stąd wnioskujemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ jest jednostajnie ograniczony na I. Kładąc $a_n = 1/n$ dostajemy tezę wniosku. $\diamondsuit$

6. Efekt Gibbsa.

Jeśli funkcja f jest nieciągła w punkcie $\mathring{x}$, to jej szereg Fouriera nie może być jednostajnie zbieżny do f w otoczeniu tego punktu. Faktycznie okazuje się, że w otoczeniu punktu nieciągłości $\mathring{x}$ funkcji f kawałkami gładkiej jej szereg Fouriera jest o około 9% różnicy $|f(\mathring{x}^+)-f(\mathring{x}^-)|$ większy lub mniejszy od wartości $f(\mathring{x}^+)$. Efekt ten nazywamy efektem Gibbsa, który go zauważył w 1899 r. Zjawisko to ma znaczenie praktyczne, gdyż wynika z niego, że w otoczeniu punktu nieciągłości nie można dokładnie przedstawić funkcji w postaci jej szeregu Fouriera. Matematycznie opiszemy efekt Gibbsa na przykładzie funkcji

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi,$$

której szeregiem Fouriera jest szereg sinusów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

We Wniosku 4 wykazaliśmy, że szereg ten jest jednostajnie zbieżny na każdym domkniętym przedziale $I \subset (0, 2\pi)$.

Lemat 7. *Niech*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Wówczas

$$\frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \Big(\max_{0\le x\le \pi/n} \big(S_n(x) - \pi/2\big)\Big) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du - \frac{1}{2} \simeq 0,089.$$

Dowód. Ze wzoru (19) dostajemy

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} D_n(x) - \frac{1}{2}, \quad \text{gdzie} \;\; D_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x/2}{\sin x/2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^x \frac{\sin(2n+1)u/2}{2\sin u/2} du - \frac{x}{2} \\ &= \int_0^x \frac{\sin(2n+1)u/2}{u} du + W_n(x) \\ &= \int_0^{(2n+1)x/2} \frac{\sin u}{u} du + W_n(x), \end{aligned}$$

gdzie

$$W_n(x) = \int_0^x \Big(\frac{1}{2\sin u/2} - \frac{1}{u}\Big)\sin(2n+1)u/2du - \frac{x}{2}.$$

Korzystając z reguły de l'Hospitala mamy

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}\Big(\frac{1}{2\sin u/2} - \frac{1}{u}\Big) &= \lim_{u\to 0}\frac{u - 2\sin u/2}{2u\sin u/2} \overset{(H)}{=} \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u/2}{2\sin u/2 + u\cos u/2}\\ &\overset{(H)}{=} \lim_{u\to 0}\frac{2\sin u/2}{2\cos u/2 - u/2\sin u/2} = 0.\end{aligned}$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $\delta > 0$ taką, że dla $0 < x < \delta$ zachodzi

$$W_n(x) \leq \int_0^x \Big|\frac{1}{2\sin u/2} - \frac{1}{u}\Big|du + \frac{x}{2} < \varepsilon.$$

Stąd dla $0 < x < \delta$

$$\big|S_n - \frac{\pi}{2}\big| \leq \int_0^{(2n+1)x/2}\frac{\sin u}{u}du - \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Zauważmy, że funkcja

$$I(v) = \int_0^v \frac{\sin u}{u}du$$

przyjmuje maksymalną wartość dla $v = \pi$. Zatem dla n takich, że $\pi/n < \delta$ dostajemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\max_{0\leq x\leq \pi/n}\Big|S_n(x) - \pi/2\Big| &\leq \frac{1}{\pi}\max_{0\leq x\leq\pi/n}\Big|\int_0^{(2n+1)x/2}\frac{\sin u}{u}du - \frac{\pi}{2}\Big| + \varepsilon\\ &\leq \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}du - \frac{\pi}{2}\Big) + \varepsilon \simeq 0,089 + \varepsilon. \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

7. Zbieżność w L^2.

Zbieżność punktowa szeregów Fouriera, aczkolwiek intuicyjnie jasna, faktycznie wiąże się ze skomplikowanymi zjawiskami typu efektu Gibbsa, czy też braku zbieżności dla pewnych funkcji ciągłych. Znacznie lepiej pod tym względem zachowuje się zbieżność w L^2, w której co prawda różnica pomiędzy $S_N f$ oraz f w konkretnym punkcie może być duża, lecz całka z $|S_N f(x) - f(x)|^2$ po odcinku $[-\pi, \pi]$ dąży do zera, gdy $N \to \infty$. Okazuje się, że zbieżność w L^2 ma zastosowanie m.in. w cyfrowej obróbce obrazów i w mechanice kwantowej.

Definicja zbieżności w L^2 opiera się na twierdzeniu o najmniejszych kwadratach.

Twierdzenie 7. *Jeśli ciąg $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest układem ortogonalnym funkcji na odcinku $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, to dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $N \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność*

$$\Big\|f - \sum_{n=1}^N c_n g_n\Big\|_{L^2(I)} \leq \Big\|f - \sum_{n=1}^N a_n g_n\Big\|_{L^2(I)}, \tag{24}$$

gdzie $c_1, c_2, \ldots$ są współczynnikami Fouriera funkcji f względem układu $\{g_n\}$ tzn.

$$c_n = \int_a^b f(x) g_n(x) dx \Big/ \int_a^b g_n^2(x) dx. \tag{25}$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ortogonalny tzn.

$$\int_a^b g_n^2(x) dx = 1, \qquad \int_a^b g_n(x) g_m(x) dx = 0 \qquad \text{dla} \quad n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$$

Wyrażając tożsamość

$$\int_a^b \Big[f(x) - \sum_{n=1}^N a_n g_n(x)\Big]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{n=1}^N c_n^2 + \sum_{n=1}^N (c_n - a_n)^2$$

w notacji normowej dostajemy

$$\Big\|f - \sum_{n=1}^N a_n g_n\Big\|_{L^2(I)}^2 = \|f\|_{L^2(I)}^2 - \sum_{n=1}^N c_n^2 + \sum_{n=1}^N (c_n - a_n)^2.$$

Zauważmy, że ostatni składnik jest nieujemny oraz równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n = c_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\Big\|f - \sum_{n=1}^N c_n g_n\Big\|_{L^2(I)}^2 = \|f\|_{L^2(I)}^2 - \sum_{n=1}^N c_n^2 \leq \Big\|f - \sum_{n=1}^N a_n g_n\Big\|_{L^2(I)}^2,$$

co dowodzi (24) dla układu ortonormalnego. W ogólnej sytuacji wystarczy zauważyć, że jeśli układ $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ortogonalny, to układ $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $h_n = g_n / \int_a^b g_n^2(x) dx$, jest ortonormalny. $\diamondsuit$

Z dowodu Twierdzenia 7 dostajemy:

Wniosek 5. *Jeśli $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest układem ortonormalnym to*

$$\Big\|f - \sum_{n=1}^N c_n g_n\Big\|_{L^2(I)}^2 = \|f\|_{L^2(I)}^2 - \sum_{n=1}^N c_n^2.$$

Stosując twierdzenie o najmniejszych kwadratach do układu trygonometrycznego dostajemy

Wniosek 6. *Jeśli A_n, B_n są współczynnikami Fouriera funkcji f okresowej o okresie 2π, to dla dowolnych stałych $C_n, n \in \mathbb{N}_0$ i $D_n, n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\begin{aligned}&\Big\|f - \Big(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N \big(A_n \cos nx + B_n \sin nx\big)\Big)\Big\|_{L^2([-\pi,\pi])} \\ \leq\ &\Big\|f - \Big(C_0 + \sum_{n=1}^N \big(C_n \cos nx + D_n \sin nx\big)\Big)\Big\|_{L^2([-\pi,\pi])}.\end{aligned}$$

Ponieważ współczynniki Fouriera c_n względem układu ortogonalnego $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ minimalizują wartość wyrażenia

$$R_N(f) = \Big\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n g_n\Big\|_{L^2(I)},$$

więc ciąg $\{R_N(f)\}_{N\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący. Zatem istnieje jego granica

$$\lim_{N\to\infty} \Big\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n g_n\Big\|_{L^2(I)} \geq 0.$$

Fakt ten stanowi stanowi podstawę definicji

Definicja. Mówimy, że szereg Fouriera funkcji f względem układu ortogonalnego $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $L^2(I)$ jeśli

$$\lim_{N\to\infty} \Big\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n g_n\Big\|_{L^2(I)} = 0. \tag{26}$$

Układ $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywa się zupełny jeśli (26) zachodzi dla każdej funkcji f ciągłej na I.

Można udowodnić, że układ trygonometryczny $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz układ eksponencjalny $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ są zupełne na $[-\pi, \pi]$.

Twierdzenie 8 (O jednoznaczności). *Jeśli dwie funkcje ciągłe mają te same współczynniki Fouriera względem zupełnego układu ortogonalnego $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, to są one identyczne.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że jeśli współczynniki Fouriera funkcji f ciągłej na I są równe zeru to $f \equiv 0$. W tym celu zauważmy, że jeśli $c_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ to dla każdego $N \in \mathbb{N}$ mamy $f - \sum_{n=1}^{N} c_n g_n = f$. Wobec zupełności oznacza to, że $\|f\|_{L^2(I)} = 0$. Stąd ponieważ f^2 jest ciągła wnioskujemy, że $f^2 \equiv 0$, a więc $f \equiv 0$. $\diamondsuit$

Okazuje się, że dla zupełnego układu ortonormalnego nierówność Bessela staje się równością.

Twierdzenie 9 (Tożsamość Parsevala). *Niech $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie układem ortonormalnym na $I = [a, b]$. Wówczas układ $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji f ciągłej (lub kawałkami ciągłej) na I zachodzi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x)dx.$$

Dowód. Na podstawie Wniosku 5 mamy

$$\Big\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n g_n \Big\|_{L^2(I)} = \Big(\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \Big)^{1/2}.$$

Jeśli $N \to \infty$ to zbieżność do zera jednej strony tej równości implikuje zbieżność do zera drugiej strony. $\diamondsuit$

Wniosek 7. *Dla dowolnej funkcji f okresowej o okresie 2π, kawałkami ciągłej zachodzi*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{2} A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n^2 + B_n^2 \big).$$

Przykład 10. Niech f będzie okresowa o okresie 2π taka, że $f(x) = \pi - x$ dla $x \in [0, 2\pi)$. Wówczas $A_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $B_n = \frac{2}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem na podstawie Wniosku 7 mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Zastosowania szeregów Fouriera.

I. Równanie ciepła.

Motywując potrzebę szeregów Fouriera wyprowadziliśmy wzór na rozwiązanie problemu propagacji ciepła w pręcie o długości l. Jeśli $l = \pi$, to kandydatem na rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \\ u(0,x) = f(x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

zgodnie ze wzorami (7) i (8) jest

$$u(t,x) = \sum_{n=1} b_n e^{-n^2 t} \sin nx, \tag{27}$$

gdzie współczynniki b_n spełniają

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = f(x) \qquad \text{dla} \quad x \in [0,\pi]. \tag{28}$$

Zatem jeśli założymy, że f jest ciągła, kawałkami gładka na $[0,\pi]$ oraz $f(0) = f(\pi) = 0$, to

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \tag{29}$$

przy czym $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$ oraz szereg sinusów (28) jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji będącej okresowym przedłużeniem funkcji nieparzystej

(30)
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } 0 \le x \le \pi, \\ -f(-x) & \text{dla } -\pi \le x \le 0. \end{cases}$$

Pozostaje mam jeszcze zbadać zbieżność szeregu (27). Otóż, jeśli $|b_n| \le C < \infty$, to dla $t \ge \varepsilon > 0$ mamy
$$\left|b_n e^{-n^2 t} \sin nx\right| \le C e^{-n^2\varepsilon}.$$

Zauważmy, że $e^{-n^2\varepsilon} \le \frac{1}{n^2\varepsilon}$. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\varepsilon}$ jest zbieżny i z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg (27) jest zbieżny jednostajnie do funkcji $u(t,x)$ ciągłej na $[\varepsilon,\infty)\times\mathbb{R}$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$, u jest ciągła na $(0,\infty)\times\mathbb{R}$. Licząc pochodne cząstkowe względem t oraz x, a następnie korzystając z nierówności

$$e^{-n^2\varepsilon} \le C_N\Big(\frac{1}{n^2\varepsilon}\Big)^N$$

dla pewnej stałej $C_N < \infty$ wnioskujemy, że szeregi pochodnych są zbieżne do funkcji ciągłej. Zatem $u \in C^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}\big)$.

Rozważania analogiczne do powyższych można przeprowadzić dla problemów

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \\ u(0,x) = f(x), \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \\ u(0,x) = f(x), \\ u(t,0) = u(t,\pi). \end{cases}$$

II. Równanie struny.

Drgania struny o długości $l = \pi$ i zaczepionych końcach są opisane przez problem początkowo-brzegowy

(31)
$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \\ u(0,x) = f(x), \\ u_t(0,x) = g(x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \end{cases}$$

gdzie funkcje f i g są dane i spełniają warunki zgodności $f(0) = f(\pi) = 0, g(0) = g(\pi) = 0$. W celu rozwiązania tego problemy zastosujemy metodę rozdzielania zmiennych. Czyli szukamy rozwiązania w postaci $u(t,x) = F(t)G(x)$. Wstawiając do pierwszego równania w (31) dostajemy

(32)
$$\frac{F''(t)}{F(t)} = \lambda = \frac{G''(x)}{G(x)}.$$

Drugie równanie w (32) po uwzględnieniu warunków brzegowych przyjmuje postać problemu

$$\begin{cases} G''(x) = \lambda G(x), \\ G(0) = G(\pi) = 0. \end{cases}$$

Problem ten ma nietrywialne rozwiązanie jedynie dla $\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$G(x) = G_n(x) = C_n \sin nx.$$

Teraz dla $\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N}$ pierwsze równanie w (32) przyjmuje postać

$$F''(t) = -n^2 F(t).$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$F_n(x) = A_n \cos nt + B_n \sin nt.$$

Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja

$$u_n(t,x) = \big(A_n \cos nt + B_n \sin nt\big) \sin nx$$

spełnia

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Ponieważ równanie struny jest liniowe suma funkcji u_n również spełnia powyższy problem (także suma nieskończona, o ile jest ona zbieżna). Zatem ogólne rozwiązanie jest dane przez

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos nt + B_n \sin nt\big) \sin nx. \tag{33}$$

Trzeba jeszcze dobrać współczynniki A_n, B_n tak, aby spełnione były warunki początkowe w (31) tzn. $u(0,x) = f(x)$, $u_t(0,x) = g(x)$. Otóż kładąc $t = 0$ w (33) dostajemy

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = f(x).$$

Stąd

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx. \tag{34}$$

Licząc pochodną $u(t,x)$ względem t mamy

$$u_t'(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(- nA_n \sin nt + nB_n \cos nt\big) \sin nx.$$

Następnie kładąc $t = 0$ mamy

$$u_t'(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin nx = g(x).$$

Stąd

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx. \tag{35}$$

Trzeba jeszcze zbadać zbieżność szeregu (33). Otóż, jeśli funkcje f i g są ciągłe i kawałkami gładkie, to szereg ten jest zbieżny. Tym nie mniej, aby funkcja $u(t,x)$ spełniała równanie $u_{tt} = u_{xx}$ powinna ona posiadać ciągłe drugie pochodne cząstkowe. Zauważmy, że licząc drugie pochodne cząstkowe (33) względem t lub x pojawia się czynnik n^2, który może uniemożliwić zbieżność otrzymanego szeregu. Aby zagwarantować zbieżność szeregu na drugie pochodne funkcji u można założyć, że $f \in C^3$, $g \in C^2$ oraz, że f, f', f'', g, g', g'' znikają w 0 i w π. Wówczas współczynniki A_n, B_n spełniają przy pewnym $C < \infty$

$$|A_n| \le \frac{C}{n^4}, \qquad |B_n| \le \frac{C}{n^3}$$

i szereg (33) można 2-krotnie różniczkować względem t oraz x.

Przykład 11. Struna o długości π została naciągnięta w środku do wysokości h, a następnie puszczona. Wyznaczyć drgania tej struny.

Mamy do rozwiązania zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \\ u(0,x) = f(x), \\ u_t(0,x) = 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{\pi} & \text{dla } 0 \le x \le \pi/2, \\ 2h - \frac{2h}{\pi} & \text{dla } \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Zgodnie ze wzorami (33)-(35) mamy $B_n = 0$ oraz

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \sin nx,$$

gdzie

$$\text{dla} \quad n = 2k, k \in \mathbb{N}, \qquad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{dla} \quad n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0, \qquad A_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2h}{\pi} x \sin(2k+1)x dx \\ &= \frac{8h}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx \\ &= \frac{8h}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$u(t,x)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t\sin(2k+1)x,$$

przy czym szereg jest zbieżny do funkcji ciągłej, lecz nie różniczkowalnej. Faktycznie można wykazać, że

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big(\widetilde{f}(x-t)+\widetilde{f}(x+t)\big),$$

gdzie $\widetilde{f}$ jest okresowym przedłużeniem f.

III. Funkcje harmoniczne w kole jednostkowym.

Rozważmy problem Dirichleta dla koła jednostkowego

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,y)+\partial_y^2 u(x,y)=0 & \text{dla} \quad (x,y)\in D=\{x^2+y^2<1\},\\ u(x,y)=g(x,y) & \text{dla} \quad (x,y)\in S=\{x^2+y^2=1\}, \end{cases} \tag{36}$$

gdzie g jest daną funkcją na S. W celu rozwiązania tego problemu wyraźmy najpierw operator Laplace'a $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\partial_x^2+\partial_y^2$ we współrzędnych biegunowych $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. Otóż jeśli $u(x,y)=v(r,\varphi)$, to

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r}&=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}&=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\
\frac{\partial v}{\partial \varphi}&=-r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}&=r^2\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\Delta u=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Oznaczmy $g(\varphi)=g(\cos\varphi,\sin\varphi)$. Wówczas problem (36) we współrzędnych biegunowych przybiera postać

$$\begin{cases} \partial_r^2 v(r,\varphi)+\frac{1}{r}\partial_r v(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v(r,\varphi)=0 & \text{dla} \quad 0\le r\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi,\\ v(\cos\varphi,\sin\varphi)=g(\varphi) & \text{dla} \quad 0\le\varphi\le 2\pi. \end{cases} \tag{37}$$

Stosując metodę rozdzielania stałych szukamy rozwiązania (37) w postaci

$$v(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi).$$

Po wstawieniu do (37) i rozdzieleniu zmiennych dostajemy

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \lambda = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)},$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi).$$

Zauważmy, że problem

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \end{cases}$$

ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wówczas

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi = c_n e^{in\varphi}.$$

Pozostaje mam rozwiązać równanie

$$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0. \tag{38}$$

Jest to równanie Eulera, którego rozwiązania szukamy w postaci $R(r) = r^\alpha$. Po wstawieniu do równania dostajemy

$$\big(\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2\big)r^\alpha = 0.$$

Stąd $\alpha^2 - n^2 = 0$. Zatem rozwiązaniem ogólnym (38) jest

$$R_n(r) = a_n r^n + b_{-n} r^{-n} \quad \text{gdy} \;\; n \in \mathbb{N},$$
$$R_0(r) = a_0 + b_0 \ln r \quad \text{gdy} \;\; n = 0.$$

Ponieważ szukamy rozwiązania ciągłego w zerze, więc $b_0 = 0$ i $b_{-n} = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\varphi}, \tag{30}$$

gdzie współczynniki c_n wyliczamy z warunku brzegowego $v(1, \varphi) = g(\varphi)$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Wstawiając te współczynniki do (39) i sumując po $n \in \mathbb{Z}$ dostajemy wzór Poissona

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{2 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} g(\theta) d\theta.$$

Zadania.

1. Wykazać, że układ $\{\frac{1}{\pi}\sin nx, \frac{1}{\pi}\cos nx\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest ortonormalny na odcinku $[-\pi,\pi]$.

2. Znaleźć szeregi Fouriera 2π-okresowych rozszerzeń następujących funkcji zdefiniowanych na odcinku $-\pi < x \le \pi$.

a) $f(x) = x$;
b) $f(x) = |x|$;
c) $f(x) = x^2$;
d) $f(x) = \sin^2 x$;
e) $f(x) = |\sin x|$;
f) $f(x) = e^{bx}$, $b \in \mathbb{R}$ (szereg eksponent).

3. Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi.$$

4. Korzystając z kryterium Abela wykazać, że szereg
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$
jest jednostajnie zbieżny na dowolnym domkniętym odcinku $I \subset (0, 2\pi)$.

5. Znaleźć sumy następujących szeregów

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$;
c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+b^2}$; d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2}$.

6. Sprawdzić czy dana funkcja określona na odcinku $[-\pi,\pi]$ jest ciągła, kawałkami ciągła, kawałkami gładka.

a) $f(x) = (\sin x)^{1/3}$;
b) $f(x) = (\sin 2x)^{4/3}$;
c) $f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{1/5} & \text{gdy} \quad x < \pi/2, \\ \cos x & \text{gdy} \quad x \ge \pi/2. \end{cases}$

7. Znaleźć maksymalne $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ takie aby $f \in C^k(\mathbb{R})$, gdzie

a) $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^4+n^2+1}$;
b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$;
c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{2^n}$.

8. Znaleźć stałe a, b, A, B, C takie aby funkcje $g_0(x) = 1, g_1(x) = ax + b, g_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ tworzyły układ ortonormalny na odcinku $[0, 1]$.

9. Znaleźć najlepszą aproksymację w normie $L^2([0,\pi])$ funkcji $f(x) = x$ funkcjami postaci

a) $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$;
b) $b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$;
c) $a \cos x + b \sin x$.

10*. Korzystając z tożsamości Parsevala policzyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

11. Rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0,x) = x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Czy otrzymane rozwiązanie jest klasyczne? Wykazać, że

$$\sup_{x\in[0,1]} |u(t,x)| \leq Ce^{-t} \qquad \text{dla } \ t \geq 0.$$

12. Rozwiązać metodą Fouriera zagadnienie mieszane dla równania struny

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \qquad \text{w } \ \{(t,x) : t > 0, 0 < x < 1\}, \\ u(0,x) &= x - x^2 \qquad \text{dla } \ 0 < x < 1, \\ u_t(0,x) &= 0 \qquad \text{dla } \ 0 < x < 1, \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0 \qquad \text{dla } \ t \geq 0. \end{aligned}$$

Czy otrzymane rozwiązanie jest klasyczne?

13. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia mieszanego w $\mathbf{R}_+ \times (0,\pi)$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \cos t \sin x, \\ u(0,x) &= \sin^2 x \qquad \text{dla } \ 0 < x < \pi, \\ u_t(0,x) &= \sin^3 x \qquad \text{dla } \ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) &= u(t,\pi) = 0 \qquad \text{dla } \ t \geq 0. \end{aligned}$$

Czy otrzymane rozwiązanie jest klasyczne?

14. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a w prostokącie $(0,\pi) \times (0,L)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,L), \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \\ u(x,0) = x(x-\pi), \quad u(x,L) = 0. \end{cases}$$

15. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a w kole $B(0,4) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in B(0,4), \\ u(4\sin\varphi, 4\cos\varphi) = |\sin\varphi|. \end{cases}$$