

Pan dr Wojciech Górny zdobył nagrodę im. Kazimierza Kuratowskiego za wyniki swojej rozprawy doktorskiej poświęconej zagadnieniu najmniejszego gradientu. Została ona napisana pod kierunkiem prof. Piotra Rybki i dra Ahmada Sabry i obroniona na Wydziale MIM UW w czerwcu 2020 roku.

Wprawdzie początków zainteresowania funkcjami o najmniejszym gradiencie można szukać w fakcie, iż ich poziomice są powierzchniami minimalnymi, to ostatnimi czasy zastosowania poza geometrią mają wielki wpływ na rozwój tej teorii. Mianowicie, zagadnienia najmniejszego gradientu w naturalny sposób pojawiają się w obrazowaniu medycznym, czy zadaniach optymalizacyjnych, np. w swobodnym projektowaniu materiału. Jednocześnie obszar Ω w pracy pana Górnego był dwuwymiarowy a czasem trójwymiarowy. Wyniki w wyższych wymiarach wydają się być bardzo trudne.

Same zagadnienia (izotropowe, czy anizotropowe) najmniejszego gradientu można przedstawić jako minimalizację całki Dirichleta, gdyby wykładnik dwa zastąpić jedynką. Dlatego można patrzeć na rozwiązania tego zagadnienia jak na funkcje 1-harmoniczne. Można też spodziewać się, że będą to granice funkcji p -harmonicznych, gdy p dąży to jedynki. Problemem jest też spełnianie warunków brzegowych. W ogólności w obszarach niewypukłych nie są one spełnione punktowo, ale w bardzo słabym sensie. Problemy pojawiają się także wtedy, gdy Ω jest zbiorem wypukłym, ale nie ściśle wypukłym. Dodatkowo nieciągłość danych brzegowych raptem w kilku punktach może prowadzić do zaskakującej liczby rozwiązań.

Jedną z pierwszych kwestii, którą zajął się pan Górny w trakcie pracy nad doktoratem był problem braku jednoznaczności rozwiązań. W swoim podejściu do tego zagadnienia, pan Górny przyjmując geometryczny punkt widzenia sklasyfikował w artykule [G1] wszystkie możliwe rozwiązania.

Pan Górny skonstruował rozwiązania w przypadku anizotropowym przy bardzo słabych założeniach na anizotropię. Przy okazji pokazał (między innymi w artykule [G2]), że rozwiązania mogą być nieciągłe, nawet gdy dane brzegowe są ciągłe. Jest to sytuacja istotnie odmienna od izotropowej, gdzie rozwiązania dziedziczą ciągłość danych.

Pan Wojciech Górny pracując nad rozprawą, zaczął zadawać dociekliwe pytania i znajdować na nie odpowiedzi. Przykładowo, pan Górny zauważył, że rozwiązania zagadnienia najmniejszego gradientu mają wyższą całkowalność rozwiązań, niż wynika to z twierdzeń o zanurzeniu przestrzeni funkcji o wahanii ograniczonym w przestrzenie Lebesgue'a. Dodatkowo pan Górny formułował zagadnienia najmniejszego gradientu na obszarach nieograniczonych. W tym przypadku problemem jest zachowanie się funkcji w nieskończoności. Laureat zajmował się też rozwiązalnością przy osłabionych założeniach na ciągłość danych początkowym. Problemem jest to, że przestrzeń śladów rozwiązań najmniejszego gradientu jest istotnie mniejsza niż $L^1(\partial\Omega)$, ale jej charakterystyka nie jest znana.

Przedstawiane wyżej wyniki oparte były, można rzec, na analizie geometrycznej, a zwłaszcza analizie przebiegu poziomicy. Z czasem pan Górny poszerzył zakres zainteresowań i stosowanych narzędzi. Mianowicie, dzięki nawiązaniu w roku 2018 współpracy z Samerem Dweikiem, (dr Dweik był podówczas doktorantem prof. Filippo Santambrogio) dr Górny zaczął stosować techniki transportu optymalnego do badania rozwiązań najmniejszego gradientu na płaszczyźnie. Pozwalają one na zupełnie nowe spojrzenie na to zagadnienia. Dzięki nim można było zbadać sytuację, która wydawała się być poza zasięgiem dostępnych metod wymagających wypukłości obszaru, w którym rozważamy nasze zagadnienie minimalizacyjne. Jest nią zagadnienie najmniejszego gradientu w pierścieniu. Młodzi badacze udzielili w artykule [DG] odpowiedzi twierdzącej na pytanie o istnienie rozwiązań, choć po pewnej modyfikacji problemu.

Pan Górny po obronie doktoratu nie porzucił tematu przedstawionego wyżej, ale pracując z prof. José Mazonem przeniósł go na wyższy poziom abstrakcji inicjując rozważania zagadnienie najmniejszego gradientu w przestrzeniach metrycznych. Ten wątek już nie wchodzi w skład doktoratu, czekamy na kolejne znakomite wyniki.

Literatura

- [DG] S.Dweik and W. Górny, *Least gradient problem on annuli*, Anal. PDE, *to appear*.
- [G1] W. Górny, *Planar least gradient problem: existence, regularity and anisotropic case*, Calc. Var. PDE, **57**(4), Paper No. 98, 27 pp., 2018.
- [G2] W. Górny, *Least gradient problem with respect to a non-strictly convex norm*. Nonlinear Anal. **200** (2020), 112049, 26 pp.