Mykola Bratiichuk
Politechnika Śląska, Instytut Matematyki

Zadanie o bankructwie dla procesu ryzyka na przedziale

Niech $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, $\xi(0) = 0$ będzie procesem Poissona z eksponentą

$$k(s) = t^{-1} \ln \mathbf{E} e^{s\xi(t)} = as + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{sx} - 1)\, dF(x), \qquad a > 0. \tag{1}$$

Dla ustalonego $T > 0$ i $x \in [0; T]$ proces Poissona z odbiciem na poziomie T określamy jako

$$\xi^+(t) = x + \xi(t) - \max\{0, \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} (x + \xi(u) - T)\}.$$

Procesy takiego rodzaju są często spotykane w teorii ryzyka (patrz, na przykład, [1]).

Niech $\tau(T, x) = \inf\{t : \xi^+(t) \leqslant 0\}$ będzie chwilą bankructwa, a $N(\tau(T, x))$ oznacza ilość trafień na poziom T do chwili bankructwa.

Twierdzenie 1 *Funkcja* $\Psi(T, x) = \mathbf{E} e^{-\mu\tau(T,x)} z^{N(\tau(T,x))} - 1$ *jest jedynym rozwiązaniem równania*

$$a \frac{d\Psi(T, x)}{dx} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \big(\Psi(T, x + y) - \Psi(T, x)\big)\, dF(y) - \mu\Psi(T, x) = \mu, \qquad 0 < x < T \tag{2}$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$\Psi(T, x) = \Psi(T, T), \quad x \geqslant T, \qquad \Psi(T, x) = 0, \quad x \leqslant 0; \tag{3}$$

$$\frac{d\Psi(T, x)}{dx}\Big|_{x=T-0} = \frac{(\mu + \alpha\lambda)(z - 1)}{az}\, \Psi(T, T). \tag{4}$$

Przy pewnych założeniach wobec rozkładu $F(x)$ dla $x > 0$ rozwiązanie zagadnienia (1)–(3) można znaleźć w postaci jawnej, co z kolei pozwala zbadać własności funkcjonałów $\tau(T, x)$, $N(\tau(T, x))$.

Bibliografia

[1] X. S. Lin, K. P. Pavlova, *The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy*, Insurance: Mathematics and Economics 38 (2006), 57–80.