Wiesław Dziubdziela
Instytut Matematyki UJK w Kielcach

Asymptotyka wartości ekstremalnych i rekordowych

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie F, a $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oznacza maksimum pierwszych n zmiennych losowych. Wtedy

$$P(M_n \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) = F^n(x).$$

Niezdegenerowana dystrybuanta G jest dystrybuantą ekstremalną, gdy istnieje ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie F oraz istnieją stałe normujące $a_n > 0, b_n$ takie, że $P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{w} G(x)$, gdy $n \to \infty$. Symbol $\xrightarrow{w}$ oznacza słabą zbieżność dystrybuant, czyli w punktach x ciągłości dystrybuanty granicznej G. Mówimy wtedy, że F należy do obszaru przyciągania rozkładu ekstremalnego G.

Szeroko akceptowaną standardową reprezentacją rozkładów ekstremalnych jest reprezentacja Jenkinsona–von Misesa postaci

$$EV_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left\{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\right\}, & \text{gdy } 1+\gamma x > 0,\ \gamma \neq 0, \\ \exp\{-e^{-x}\}, & \text{gdy } x \in \mathbf{R},\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Dystrybuanta EV_γ jednolicie zapisuje trzy rodzaje ekstremalnych rozkładów:
rozkład Gumbela, $\Lambda(x) = EV_0(x) = \exp\left\{\exp(-x)\right\}$, $-\infty < x < \infty$, $\gamma = 0$;
rozkład Frécheta, $\Phi_\alpha(x) = EV_{1/\alpha}) = \exp\left\{-x^{-\alpha}\right\}$, $x > 0$, $\gamma = 1/\alpha > 0$;
rozkład Weibulla, $\Psi_\alpha(x) = EV_{-1/\alpha}(\alpha(x+1)) = \exp\left\{-(-x)^{-\alpha}\right\}$, $x < 0$, $\gamma = -1/\alpha < 0$.

W zastosowaniach wykorzystywana jest aproksymacja $P(M_n \leqslant x) = F^n(x) \approx EV_\gamma\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right)$. Zapiszmy aproksymację dystrybuanty maksimum $P(M_n \leqslant x)$ w postaci

$$P(M_n \leqslant x) \approx \exp\left\{-\left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\gamma}\right\},$$

gdzie $1 + \gamma\frac{x-\mu}{\sigma} > 0$; $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ i $\gamma \in \mathbf{R}$. Przypadek $\gamma = 0$ interpretujemy jako granicę $\gamma \to 0$. Otrzymujemy wtedy aproksymację rozkładem Gumbela $P(M_n \leqslant x) \approx \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}$, gdzie $-\infty < x < \infty$.

Wykorzystując aproksymację uogólnionym rozkładem ekstremalnym, otrzymujemy oszacowanie dla kwantyli:

$$EV_\gamma(x_p) = 1 - p \Rightarrow x_p = \mu - \frac{\sigma}{\gamma}\left[1 - \left\{-\log(1-p)\right\}^{-\gamma}\right].$$

Parametry μ i σ interpretujemy odpowiednio jako parametry położenia i skali. Natomiast wartości parametru γ wyznaczają zachowanie asymptotyczne ogonów dystrybuanty. Parametr ten jest nazywany parametrem kształtu. Mierzy on grubość prawego ogona $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

W referacie przedstawimy metody estymacji parametrów γ, μ i σ. Szczególną uwagę zwrócimy na metody oparte o k-te statystyki (wartości) rekordowe.

Omówiona będzie także słaba asymptotyka k-tych statystyk pozycyjnych i k-tych statystyk rekordowych.