dr Andrzej Just, dr Zdzisław Stempień
Politechnika Łódzka

Zadanie sterowania optymalnego opisane równaniem drgań lepko-sprężystej belki i jego aproksymacja typu Galerkina

W referacie rozważamy zadanie sterowania optymalnego, które opisane jest równaniem drgań lepko-sprężystej belki postaci

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left[\beta + \gamma \int_0^l \left(\frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} - \sigma \int_0^l \frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial \xi \partial t} d\xi \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial y}{\partial t} = g + Bu. \tag{1}$$

Stałe fizyczne α, γ, δ, $\sigma > 0$ i β, $\eta \in \mathbb{R}$. Zmienna przestrzenna $x \in (0,l)$, czas $t \in S = (0,T)$ dla l, $T < \infty$. g jest zadaną funkcją, u jest parametrem sterującym oraz B jest operatorem liniowym i ciągłym. Z fizycznego punktu widzenia rozważamy dwa rodzaje warunków brzegowych

$$y(0,t) = y(l,t) = \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(l,t)}{\partial x} = 0 \qquad \text{dla końców sztywnych belki,} \tag{2}$$

$$y(0,t) = y(l,t) = \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{dla końców podpartych belki.} \tag{3}$$

Zajmujemy się zagadnieniem początkowo-brzegowym dla równania (1) drgań belki z warunkami początkowymi

$$y(x,0) = y_0(x), \qquad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = y_1(x) \tag{4}$$

i z warunkami brzegowymi (2) lub (3).

Niech $V = H_0^2(\Omega)$ lub $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ i $H = L^2(\Omega)$ będą znanymi przestrzeniami Sobolewa. Ponadto niech przestrzeń sterowań U będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta, a operator $B \in \mathcal{L}(U; L^2(Q))$, gdzie $Q = (0,l) \times S$.

Rozważamy równanie drgań belki (1) w słabym sensie, tzn. szukamy funkcji $y \in \mathcal{W} = \big\{\omega \in L^2(Q) \mid \omega_x, \omega_{xx}, \dot{\omega} \in L^2(Q)\big\}$ z normą $||\omega||_{\mathcal{W}} = ||\omega||_{L^2(Q)} + ||\omega_x||_{L^2(Q)} + ||\omega_{xx}||_{L^2(Q)} + ||\dot{\omega}||_{L^2(Q)}$, która spełnia równanie

$$\begin{aligned} &\langle \ddot{y}(t), \psi\rangle + \alpha(y_{xx}(t), \psi_{xx}) - \big(\beta + \gamma ||y_x(t)||_H^2\big)(y_{xx}(t), \psi) + \delta(\dot{y}_{xx}(t), \psi_{xx}) \\ &\quad - \sigma(y_x(t), \dot{y}_x(t))(y_{xx}(t), \psi) + \eta(\dot{y}(t), \psi) = \big(g(t) + (Bu)(t), \psi\big), \quad \forall \psi \in V \text{ for a.e. } t \in S, \\ &y(0) = y_0 \text{ and } \dot{y}(0) = y_1. \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^* \times V}$ jest relacją dualności między odpowiednimi przestrzeniami.

Problem sterowania, który analizujemy, można sformułować następująco: znaleźć parę $(u^0, y^0) \in U \times \mathcal{W}$, która minimalizuje funkcjonał $J(u,y)$, gdzie $J : U \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ i $y = y(u)$ jest jedynym rozwiązaniem równania (5) dla $u \in U$.

Przy odpowiednich założeniach dowodzimy, że tak postawione zadanie sterowania optymalnego posiada co najmniej jedno rozwiązanie. Do rozważanego zadania sterowania stosujemy skończeniewymiarową aproksymację typu Galerkina względem zmiennej przestrzennej oraz dla przestrzeni sterowań U. Dowodzimy twierdzenia o istnieniu rozwiązań optymalnych dla zadań po aproksymacji oraz ich słabej zbieżności do jakiegoś rozwiązania wyjściowego zadania sterowania w odpowiednich przestrzeniach.