Tomasz Komorowski
IM PAN Warszawa
Thomas Chen
Univ. of Texas, Austin
Lenya Ryzhik
Stanford Univ.

Asymptotyka rozwiązań równania Schrödingera z losowym potencjałem

Rozważać będziemy asymptotykę rozwiązań równania Schrödingera ze słabym potencjałem losowym

$$\begin{aligned} & i\,\frac{\partial \psi^{(\epsilon)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi^{(\epsilon)} - \epsilon V(x)\psi^{(\epsilon)} = 0, \\ & \psi^{(\epsilon)}(0,x) = \psi_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, zaś $V(x)$ jest potencjałem zadanym przez stacjonarne, gaussowskie pole losowe o funkcji kowariancji postaci

$$R(x) := \mathbb{E}[V(x+y)V(y)] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot p}\hat{R}(p)\,dp, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie $\hat{R}(p)$ jest nieujemną funkcją (zwaną *spektrum energetycznym*). Funkcja ta szybko znika w nieskończoności oraz spełnia $\hat{R}(p) \sim |p|^{-\gamma}$, $|p| \ll 1$, dla pewnego $\gamma < d$. Opiszemy asymptotykę zachowania tzw. *skompensowanej funkcji falowej* $\zeta_\epsilon(t,x)$, tj. funkcji, której transformata Fouriera wynosi

$$\hat{\zeta}_\epsilon(t,\xi) := \hat{\psi}^{(\epsilon)}\left(\frac{t}{\epsilon^2},\xi\right)e^{i|\xi|^2 t/2\epsilon^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

przy $\epsilon \ll 1$. Tutaj $\hat{\psi}^{(\epsilon)}(t,\xi)$ jest transformatą Fouriera $\psi^{(\epsilon)}(t,x)$. W szczególności zachodzi następujące

Twierdzenie. *Jeśli* $d \geqslant 3$ *oraz*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{R}(p)\,dp}{|p|^2} < +\infty$$

to istnieje $t_0 > 0$ *takie, że dla* $t \in [0,t_0]$ *oraz* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *zachodzi*

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \mathbb{E}\hat{\zeta}_\epsilon(t,\xi) = \hat{\psi}_0(\xi)\exp\left\{-\frac{\kappa(\xi)t}{(2\pi)^{d/2}}\right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie $\kappa(\xi)$ *jest pewną funkcją daną w sposób jawny.*