mgr inż. Kamila Łyczek
doktorantka, Wydział MIM UW

Eksploatacja zasobów — model dynamiczny

1. Wprowadzenie. Gracze eksploatują odnawialny zasób (np. ryby w zbiorniku wodnym, czy lasy deszczowe) i niezależnie decydują o poziomie eksploatacji (strategia to np. liczba statków zaangażowana w połów). W każdym momencie gracze mają całkowitą wiedzę o stanie układu (wielkości dostępnych zasobów i strategii przeciwników). Celem graczy jest maksymalizacja całkowitego zysku z odsprzedaży zasobów.

2. Model eksploatacji dla dwóch graczy. Rozważamy zasób, którego dynamikę opisuje równanie

$$x'(t) = w(x, E_1, E_2) = F(x(t)) + q_1 E_1(t)x(t) + q_2 E_2(t)x(t), \quad t \in [0, T],\ x(0) = x_0,$$

- $x(t) \geqslant 0$ — wielkość zasobu w czasie t (np. liczba śledzi w Bałtyku, objętość lasów deszczowych),
- F — naturalny wewnętrzny wzrost zasobu (w postaci logistycznej),
- $E_i(t)$ dla $i = 1, 2$ — strategie graczy (mierzone np. w liczbie statków zaangażowanych w połów ryb),
- q_i dla $i = 1, 2$ — skuteczność strategii (eksploatacji) każdego gracza.

Gracze maksymalizują zysk z odsprzedaży zasobów w ustalonym horyzoncie czasowym (skończonym lub nie):

$$J_i = g_i(x(T)) + \int_0^T z_i(x(t), E_1(t), E_2(t))\, dt,$$

gdzie z_i to funkcja wartości odsprzedaży zasobów.

Powyższy model dla skończonego horyzontu czasowego został przedstawiony w pracy [2].

3. Co tu jest do zrobienia?

1. **Optimum Pareto dla skończonego horyzontu czasowego.** Gracze współpracują ze sobą i celem jest maksymalizacja wspólnego zysku. Do rozwiązania tego typu zagadnienia stosowane są dwie metody — *równanie Bellmana* oraz *zasada maksimum Pontriagina*. Jednak dla powyższego modelu problem nie jest ostatecznie rozwiązany.
2. **Optimum Pareto dla nieskończonego horyzontu czasowego.** W pracy [1] autorzy sformułowali modyfikację zasady maksimum Pontriagina dla czasu nieskończonego, stosując metodę zaburzeń igielnych (*needle variations technique*). Problem dla analizowanego modelu nie jest rozwiązany. Jest to temat moich badań.

   W przypadku, gdy gracze maksymalizują swoje zyski niezależnie:
3. **Strategie optymalne dla skończonego oraz nieskończonego horyzontu czasowego**
4. **Równowaga Nasha.** Żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić strategii, o ile przeciwnik nie zmieni swojej, gdyż to będzie skutkować mniejszym zyskiem dla gracza, który zmienił decyzję, przy zysku, bądź braku straty przeciwnika.
5. **Równowaga z groźbami** (*incentives strategies*). Graczowi (żadnemu) nie opłaca się zmienić strategii, gdyż przeciwnik zareaguje strategią niekorzystną dla gracza, na którego strategię odpowiada, przy czym dopuszcza również swoją stratę.

Bibliografia

[1] S. M. Aseev, V. M. Veliov, *Needle Variations in Infinite-Horizon Optimal Control*, Contemporary Mathematics 619 (2014), http://dx.doi.org/10.1090/conm/619/12381.

[2] H. Ehtamo, R. P. Hämäläinen, *A cooperative incentive equilibrium for a resource management problem*, Journal of Economic Dynamics and Control 17 (1993), 659–678.