Tadeusz Rzeżuchowski, dr hab., prof. nz.
Janusz Wąsowski, dr
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej

AE rozwiązania układów równań liniowych z niepewnymi parametrami

W liniowym układzie równań $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, przyjmujemy, że zarówno elementy macierzy A, jak i składowe wektora b obarczone są niepewnością, która opisana jest przez zbiór parametrów $p \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k$, czyli $A = A(p)$, $b = b(p)$. Mamy więc całą rodzinę układów

$$A(p)x = b(p), \quad p \in \mathcal{D}\,.$$

Z częścią parametrów p_μ z $p = (p_1, \ldots, p_k)$ skojarzony jest kwantyfikator $\forall$, z pozostałymi kwantyfikator $\exists$. Te pierwsze grupujemy w wektor $p_\forall$, pozostałe w wektor $p_\exists$ — wektor p możemy więc reprezentować jako $p = (p_\forall, p_\exists)$. Przez $\mathcal{D}^\forall$ oznaczamy rzut zbioru $\mathcal{D}$ na podprzestrzeń $\mathbb{R}^\forall$ przestrzeni $\mathbb{R}^k$ zawierającą parametry z $p_\forall$.

Mówimy, że wektor $x \in \mathbb{R}^n$ należy do AE rozwiązania $\Xi_{\mathbb{R}^\forall}(A(p), b(p), \mathcal{D})$, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall p_\forall \in \mathcal{D}^\forall, \exists p_\exists :\ (p_\forall, p_\exists) \in \mathcal{D} \text{ i } A(p_\forall, p_\exists)x = b(p_\forall, p_\exists)\,.$$

Jeśli z wszystkimi parametrami związany jest kwantyfikator $\exists$, to mówimy o AE rozwiązaniu typu *uni* (unified solution set) i przyjmujemy, że $x \in \Xi_{\mathrm{uni}}(A(p), b(p), \mathcal{D})$, jeśli spełniony jest warunek

$$\exists p \in \mathcal{D} :\ A(p)x = b(p)\,.$$

Ważne są metody sprawdzania, czy dany wektor należy do AE rozwiązania oraz pozwalające opisać zbiór wszystkich x należących do AE rozwiązania (badane m.in. w [1], [2], [3], [6]. Proponujemy oparcie ich na narzędziach z zakresu teorii zbiorów wypukłych.

Przy dość naturalnych założeniach warunek należenia x do AE rozwiązania można przeformułować na warunek zawierania jednego odpowiednio zdefiniowanego zbioru wypukłego w drugim, a to może być sprawdzane, na przykład, przy użyciu funkcji podpierających. Dzięki temu podejściu można uzyskać nowe uzasadnienia znanych wyników, ale też nowe.

Pojęcie AE rozwiązania wprowadzone zostało w pracy [5], a uogólnione w [4]. Proponowane podejście pozwala rozszerzyć je na szerszą klasę układów.

Bibliografia

[1] M. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer, *On the solution sets of particular classes of linear interval systems*, J. Comput. Appl. Math. 152 (2003), 1–15.

[2] M. Hladik, *Description of symmetric and skew-symmetric solution set*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 30 (2008), 509–521.

[3] E. Popova, *Explicit description of AE solution sets for parametric linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 33 (2012), 1172–1189.

[4] E. Popova, W. Krämer, *Characterization of AE solution sets to a class of parametric linear systems*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. 64 (2011), 325–332.

[5] S. P. Shary, *A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity*, Reliable Computing 8 (2002), 321–418.

[6] I. A. Sharaya, S. P. Shary, *Tolerable solution set for interval linear systems with constraints on coefficients*, Reliable Computing 15 (Special volume for SCAN 2008), 345–357.