Model Pasywnego Trasera w Lokalnie Ergodycznym Środowisku

Tymoteusz Chojecki
UMCS, Lublin
Tomasz Komorowski
IMPAN, Warszawa

Kościelisko, 10 września 2016,
XLV Konferencja Zastosowań Matematyki

Zawartość

Zawartość

Zawartość

Zawartość

Zawartość

Transport w skomplikowanym ośrodku. Turbulentna dyfuzja

- **Turbulentny przepływ**

- transport masy, ciepła lub pędu w płynie w warunkach w pełni rozwiniętej turbulencji.

- **liczba Reynoldsa**

$$Re = \frac{UL}{\nu}.$$

- **założenie stacjonarności i ergodyczności** - własności statystyczne nie zależą od przesunięć w czasie i przestrzeni
- **Twierdzenie ergodyczne** - w badaniu asymptotyki konieczne jest uśrednianie.
- Badamy pola **lokalnie ergodyczne**.

Model Pasywnego Trasera [Taylor '20]

- Traser $X(t)$
- Pole losowe $V(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = V\left(t, X(t)\right), \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

- Interpretacja fizyczna

Skalowanie dyfuzyjne

- Obserwacje zewnętrzne
- Dynamika procesu
- Skalowanie dyfuzyjne $X^{\varepsilon}(t) := \varepsilon X(t/\varepsilon^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{dX^{\varepsilon}(t)}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon} V\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2}, \dfrac{X^{\varepsilon}(t)}{\varepsilon}\right) \\ \\ X^{\varepsilon}(0) = 0. \end{cases}$$

Klasyczne pytania

Podstawowe pytania

- **PWL** - Istnienie granicy $v_* := \lim_{t\to+\infty} X(t)/t$ p.p, (**dryf Stokes'a**).
- **CTG**

$$\frac{X(t)-v_* t}{\sqrt{t}} \Rightarrow N(0,\kappa), \quad t\to+\infty?$$

Macierz kowariancji $\kappa = [\kappa_{i,j}]$, $i,j = 1,\dots d$ jest nazywana **turbulentną dyfuzyjnością**.

Klasyczne pytania

Podstawowe pytania

- **PWL** - Istnienie granicy $v_* := \lim_{t\to+\infty} X(t)/t$ p.p, (**dryf Stokes'a**).
- **CTG**
$$\frac{X(t) - v_* t}{\sqrt{t}} \Rightarrow N(0,\kappa), \quad t \to +\infty?$$
Macierz kowariancji $\kappa = [\kappa_{i,j}]$, $i,j = 1,\ldots d$ jest nazywana **turbulentną dyfuzyjnością**.

Zastosowanie w teorii homogenizacji

Równanie Transportu.

$$\begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon} V\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x \Phi_\varepsilon(t,x) + \partial_t \Phi_\varepsilon(t,x) = 0, \\ \Phi_\varepsilon(0,x) = \Phi_0(x). \end{cases}$$

- Φ_0, $\Phi_\varepsilon(t,x)$ - **pasywny skalar**
- Badamy $\varepsilon \to 0$
- **Metoda charakterystyk**, symetria rozkładu $V(t,x) \Longrightarrow$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\Phi_\varepsilon(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\Phi_0\left(X_x^\varepsilon(t)\right),$$

Pola Lokalnie Ergodyczne

Pole

- **Nieściśliwe**
- **Gaussowskie**
- **Markowowskie**
- **Lokalnie Ergodyczne** [Rodes '09, Olla,Siri '04].

$$\begin{cases} \dfrac{dX^{\varepsilon}(t)}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbf{W}\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2}, \dfrac{X^{\varepsilon}(t)}{\varepsilon}, X^{\varepsilon}(t)\right), \\ X^{\varepsilon}(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

- **parametr lokalnej stacjonarności**
- Pole $\mathbf{W}(t, x, \varepsilon y)$ **stacjonarne i ergodyczne** dla ustalonego y.
- $\varepsilon \ll 1$.

Konstrukcja Pola Lokalnie Ergodycznego

- $N \in \mathbb{N}$ liczba **modów**, d-wymiar.

$$W_l(t,x,\varepsilon y) := \sum_{j=1}^{N} \bar{a}_j^{(l)}(t;x,\varepsilon y),\ l = 1,\ldots,d,\ (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d},$$

gdzie procesy **quasi-periodyczne** po x

$$\bar{a}_j(t,x;y) := a_j(t;y)\cos(k_j \cdot x) + b_j(t;y)\sin(k_j \cdot x), \quad j = 1,\ldots,N,$$

- Stacjonarne procesy **Ornsteina-Uhlenbecka** $a_j(t;y)$, $b_j(t;y)$

Procesy Ornsteina-Uhlenbecka

- **Stacjonarne**, d-wymiarowe [Komorowski, Fannjiang '99, Carmona, Xu '96]

$$da_j(t;y) = -\alpha_j(y)a_j(t;y)dt + \sqrt{2\alpha_j(y)}\sigma_j(y)dw_{j,a}(t),$$
$$db_j(t;y) = -\alpha_j(y)b_j(t;y)dt + \sqrt{2\alpha_j(y)}\sigma_j(y)dw_{j,b}(t),$$

- **Miara niezmiennicza** $\nu_{*,y}(d\mathbf{a}, d\mathbf{b})$.
- $w_{j,a}(t), w_{j,b}(t), t \geq 0$ - niezależne, standardowe d-wymiarowe **ruchy Browna**.
- **funkcje** $\alpha_j(y), \sigma_j(y),\ y \in \mathbb{R}^d$.
- **Przerwa Spektralna** dla $1 \leq j \leq N, y \in \mathbb{R}^d$

$$0 < \alpha < \min(\alpha_j(y), \sigma_j(y)) < \max(\alpha_j(y), \sigma_j(y)) < \sigma$$

.

Miara niezmiennicza

$\nu_{*,y}(d\mathbf{a}, d\mathbf{b}) = \Gamma_*(\mathbf{a}, \mathbf{b}; y) d\mathbf{a} d\mathbf{b}$, gdzie

$$\Gamma_*(\mathbf{a}, \mathbf{b}; y) = \mathcal{Z}_y^{-1} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^2}{2\sigma_j^2}\right\} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N} \frac{b_j^2}{2\sigma_j^2}\right\},$$

gdzie

$$\mathcal{Z}_y = (2\pi)^{Nd} \prod_{j=1}^{N} \sigma_j^2 .$$

Główny Wynik

Twierdzenie

Proces $X^{\varepsilon}(t) \Rightarrow X^{*}(t)$, gdy $\varepsilon \to 0$ słabo w $C[0,\infty;\mathbb{R}^d]$, gdzie $X^{*}(t)$ **dyfuzją**, której generator wyraża się wzorem

$$\overline{\mathcal{L}}f(x) = \sum_{q=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^{2S}} \partial_{y_q} f(x) \Bigg\{ \mathfrak{w}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \cdot \nabla_y \chi_q(\mathbf{a},\mathbf{b},x)$$

$$+ \sum_{n,j\in Z} \left\{ \frac{d\alpha_i(x)}{dx_n} \left(\Theta^i(\mathbf{a},\mathbf{b},x), \Theta^i(\mathbf{a},\mathbf{b},x)\right) \cdot (a_j, b_j) \right\} \Big] \Bigg\} \nu_{*,x}(d\mathbf{a}, d\mathbf{b})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^{2S}} \partial^2_{y_q} f(x) \sum_{j\in Z} \Big\{ 2\alpha_i(x) \left(\sigma_j(x)\right)^2 \Big[\left(\partial_{a,j}\chi_q(\mathbf{a},\mathbf{b},x)\right)^2$$

$$+ \left(\partial_{b,j}\chi_q(\mathbf{a},\mathbf{b},x)\right)^2 \Big] \Big\} \nu_{*,x}(d\mathbf{a}, d\mathbf{b}).$$

Korektory

- **czynnik** $1/\varepsilon$ równania (1).
- Korektory - **równanie Poissona**

$$-\mathcal{L}_y \chi_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}; y) = \mathfrak{w}_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \;\; q = 1, \ldots, d.$$

- Wyrazy **zawierające pochodne po** y procesów $a_j(t; y), b_j(t; y)$.

Opis dowodu

- Ciasność
- Problem Martyngałowy Stroocka-Varadhana.
- Twierdzenie Ergodyczne

Twierdzenie Ergodyczne

Oznaczmy $\bar{F}(y) := \int F(\mathbf{a}, \mathbf{b}; y)\nu_{*,y}(d\mathbf{a}, d\mathbf{b})$.

- **Pole Losowe**

$$\tilde{F}(t, x, y) := F\left(\mathbf{a}(t; y), \mathbf{b}(t; y); y\right), \ t \geq 0, \ x, y \in \mathbb{R}^d. \qquad (2)$$

Twierdzenie Ergodyczne

Dla pola $\tilde{F}$ zdefiniowanego w (2) i funkcji F spełniającej pewne dodatkowe założenia o tempie wzrostu, oraz dla dowolnego $T > 0$ zachodzi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{E}\left| \int_0^T \tilde{F}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{X^\varepsilon(t)}{\varepsilon}, X^\varepsilon(t)\right) dt - \int_0^T \bar{F}(X^\varepsilon(t))dt \right| = 0.$$

Bibliografia

• Carmona, R., Xu, L., *Homogenization For Time Dependent 2-d Incompressible Gaussian Flows*. Preprint (1996).

• Fannjiang, A., Komorowski, T., *Turbulent Diffusion in Markovian Flows*, Ann. of Appl. Prob. 9, 591-610, (1999).

• Monin, A. S., Yaglom A. M., *Statistical Fluid Mechanics of Turbulence*, Vols I,II, MIT Press Cambridge,(1971), (1975).

• Olla, S., Siri, P., *Homogenization of a bond diffusion in a locally ergodic random environment*, Stochastic Processes and their Applications 109, pp. 317-326, 2004.

• Rhodes, R., *Diffusion in a locally stationary random environment*, Probab. Theory Related Fields 143 (2009), no. 3-4, 545568.

Dziękuję za uwagę :)