Istnienie wspólnego rozwiązania macierzowych równań Lapunowa

Stanisław Białas

The School of Banking and Management
Kraków

Michał Góra

Wydział Matematyki Stosowanej AGH
Kraków

Zakopane-Kościelisko, 6 września 2016

Wprowadzenie

Rozwiązania równania

$$x'(t) = Ax(t)$$

są stabilne (asymptotycznie) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje hermitowska dodatnio określona macierz P spełniająca warunek

$$A^*P + PA < 0.$$

Niech $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie zadanym zbiorem macierzy. Rozważmy dwa problemy:

(A) $\forall A \in \mathcal{A} \quad \exists P > 0 : A^*P + PA < 0;$

(B) $\exists P > 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} : A^*P + PA < 0.$

Problem (A) prowadzi do problemu tzw. *odpornej stabilności*; problem (B) to pytanie o istnienie (i ewentualnie wyznaczenie) macierzy P nazywanej *wspólnym rozwiązaniem równań Lapunowa* dla zbioru $\mathcal{A}$.

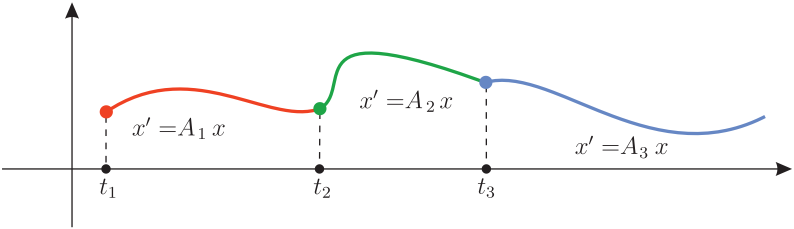
Dlaczego wspólne rozwiązanie?

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ oraz niech $\sigma : [0, +\infty) \to \{1, \ldots, N\}$ będzie funkcją przedziałami stałą. Funkcję tę będziemy nazywać funkcją (regułą) przełączającą.

Układ postaci

$$x'(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$$

nazywamy układem przełączanym (hybrydowym).



Rysunek 1. Przykładowe rozwiązanie układu przełączanego

Nie istnieją proste kryteria umożliwiające stwierdzenie stabilności rozwiązań układu przełączanego:

- układy asymptotycznie stabilne mogą generować niestabilny układ przełączany;
- układy niestabilne mogą generować układ asymptotycznie stabilny.

Warunkiem koniecznym jednostajnej (ze względu na funkcję przełączającą σ) asymptotycznej stabilności rozwiązań układu przełączanego jest stabilność (w sensie Hurwitza) macierzy $A_1, \ldots, A_N$.

Warunkiem wystarczającym jednostajnej asymptotycznej stabilności rozwiązań układu przełączanego jest istnienie wspólnego rozwiązania Lapunowa dla macierzy $A_1, \ldots, A_N$.

Dlaczego macierze zespolone?

Problem analizy stabilności rozwiązań układów niecałkowitego rzędu postaci

$$x^{(\alpha)}(t) = Ax(t),$$

gdzie $\alpha \in (1, 2)$ jest rzędem równania, można w sposób równoważny sprowadzić do problemu analizy stabilności rozwiązań układu rzędu pierwszego

$$y'(t) = \widetilde{A}y(t),$$

gdzie $\widetilde{A} = (\cos\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) + i\sin\frac{\pi}{2}(\alpha - 1))A$.

W przypadku, gdy wyjściowy proces jest rzeczywisty, tj. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, równoważny mu układ równań różniczkowych stopnia pierwszego jest już opisany przez macierz zespoloną $\widetilde{A}$.

Znane wyniki

Fakt 1. Dla ustalonej macierzy $P > 0$ zbiór

$$\mathcal{A}_P = \{A : A^* P + PA < 0\}$$

tworzy wypukły odwracalny stożek, tj.

- $A, B \in \mathcal{A}_P, \alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{A}_P$;
- $A \in \mathcal{A}_P \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{A}_P$.

Np. $A \in \mathcal{A}_P \Rightarrow A + 2A^{-1} + \left(A + A^{-1}\right)^{-1} \in \mathcal{A}_P$

Fakt 2. Macierze A i A^* posiadają wspólne rozwiązanie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy $A + A^* < 0$. Jednym z tych wspólnych rozwiązań jest wówczas macierz jednostkowa.

Fakt 3. $A \in \mathcal{A}_P, A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{A}_P$

Znane wyniki

Fakt 1. Dla ustalonej macierzy $P > 0$ zbiór

$$\mathcal{A}_P = \{A : A^*P + PA < 0\}$$

tworzy wypukły odwracalny stożek, tj.

- $A, B \in \mathcal{A}_P, \alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{A}_P;$
- $A \in \mathcal{A}_P \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{A}_P.$

Np. $A \in \mathcal{A}_P \Rightarrow A + 2A^{-1} + \left(A + A^{-1}\right)^{-1} \in \mathcal{A}_P$

Fakt 2. Macierze A i A^* posiadają wspólne rozwiązanie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy $A + A^* < 0$. Jednym z tych wspólnych rozwiązań jest wówczas macierz jednostkowa.

Fakt 3. $A \in \mathcal{A}_P, A \sim B \not\Rightarrow B \in \mathcal{A}_P$

- skończony zbiór macierzy parami komutujących (Narendra & Balakrishnan 1994)
- dwie macierze rzeczywiste stopnia drugiego (Shorten & Narendra 2002):

$$\lambda(AB) \notin (-\infty, 0] \quad \text{oraz} \quad \lambda\left(AB^{-1}\right) \notin (-\infty, 0]$$

- dwie macierze Frobeniusa (Shorten & Narendra 2003):

$$\lambda(AB) \notin (-\infty, 0]$$

- dwie macierze A, B dla których $\operatorname{rank}(A - B) = 1$ (King & Nathanson 2006):

$$\lambda(AB) \notin (-\infty, 0]$$

- dwie macierze zespolone stopnia drugiego (Laffey & Šmigoc 2007): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:$

$$\lambda((A + i\alpha I)(B + i\beta I)) \notin (-\infty, 0]$$

  oraz

$$\lambda\left((A + i\alpha I)(B + i\beta I)^{-1}\right) \notin (-\infty, 0]$$

Rozważmy operator $L : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n^2\times n^2}$ określony wzorem

$$L\left(A\right) = I_n \otimes A^* + A^T \otimes I_n,$$

gdzie: I_n – macierz jednostkowa stopnia n, $\otimes$ – iloczyn Kroneckera. Niech $H_{ij}\left(A,B\right)$ (dla $i,j = 1,\ldots,n$) oznacza macierz kwadratową stopnia n utworzoną z $i + n\left(j-1\right)$-tej kolumny macierzy $L\left(B\right)L^{-1}\left(A\right)$.

Przykład. Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ mamy

$$L\left(B\right)L^{-1}\left(A\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$H_{11}\left(A,B\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H_{21}\left(A,B\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_{12}\left(A,B\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H_{22}\left(A,B\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Główny wynik

Lemat (S. Białas, MG 2015)

Niech $A, B, P, Q = [q_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ oraz niech A będzie macierzą stabilną. Wówczas, jeżeli $A^*P + PA = Q$, to

$$B^*P + PB = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} H_{ij} \left(A, B\right).$$

Twierdzenie (S. Białas, MG 2015)

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ oraz niech A_1 będzie macierzą stabilną. Jeżeli istnieje macierz diagonalna $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \geq 0$ spełniająca warunek

$$\sum_{i=1}^{n} d_i H_{ii} \left(A_1, A_k\right) > 0, \qquad k = 2, \ldots, N$$

to dla $\mathcal{A}$ istnieje wspólne rozwiązanie Lapunowa.

Główny wynik

Lemat (S. Białas, MG 2015)

Niech $A, B, P, Q = [q_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ oraz niech A będzie macierzą stabilną. Wówczas, jeżeli $A^*P + PA = Q$, to

$$B^*P + PB = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} H_{ij}\left(A, B\right).$$

Twierdzenie (S. Białas, MG 2015)

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ oraz niech A_1 będzie macierzą stabilną. Jeżeli istnieje macierz diagonalna $D = \operatorname{diag}\left(d_1, \ldots, d_n\right) \geq 0$ spełniająca warunek

$$\sum_{i=1}^{n} d_i H_{ii}\left(A_1, A_k\right) > 0, \qquad k = 2, \ldots, N$$

to dla $\mathcal{A}$ istnieje wspólne rozwiązanie Lapunowa.

Dowód twierdzenia jest konstruktywny i można go podzielić na dwa etapy:

krok 1. dla $\varepsilon > 0$ definiujemy pewną ujemnie określoną macierz diagonalną Q_ε. Założona stabilność macierzy A_1 pozwala stwierdzić istnienie macierzy $P_\varepsilon > 0$ spełniającej równanie

$$A_1^* P_\varepsilon + P_\varepsilon A_1 = Q_\varepsilon.$$

Wyznaczamy tę macierz.

krok 2. wyznaczamy przedział postaci $(0, \varepsilon_*)$ o tej własności, że dla $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ macierz P_ε spełnia warunki

$$A_k^* P_\varepsilon + P_\varepsilon A_k < 0, \qquad \text{dla } k = 2, \ldots, N.$$

Wnioski

Wniosek 1. (z dowodu) Jeżeli macierz D występująca w twierdzeniu jest dodatnio określona, to wspólne rozwiązanie Lapunowa dla macierzy $A_1, \ldots, A_N$ można wyrazić w postaci

$$P = \int_0^{+\infty} e^{tA_1^*} D e^{tA_1} dt.$$

Wniosek 2. Jeżeli dla pewnego i zachodzi

$$H_{ii}(A_1, A_2) > 0, \ldots, H_{ii}(A_1, A_N) > 0$$

to macierze $A_1, \ldots, A_N$ posiadają wspólne rozwiązanie Lapunowa.

Wniosek 3. Jeżeli macierz A jest stabilna oraz $H_{ii}(A, B) > 0$ dla pewnego i, to macierze A, B posiadają wspólne rozwiązanie Lapunowa.

Przykład

Rozważmy dwie macierze stabilne

$$A = \begin{pmatrix} -4+i & -1-3i \\ -1-2i & 1-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5-i & 1-2i \\ 1-3i & i \end{pmatrix}.$$

Wykonując niezbędne obliczenia otrzymujemy

$$L(B)\,L^{-1}(A) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & -4-2i & -4+2i & 0 \\ -8-i & 7+12i & 3-4i & -8-i \\ -8+i & 3+4i & 7-12i & -8+i \\ 10 & -4-12i & -4+12i & 20 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$H_{11}(A,B) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & -8+i \\ -8-i & 10 \end{pmatrix}$$

oraz

$$H_{22}(A,B) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -8+i \\ -8-i & 20 \end{pmatrix}.$$

Macierz $H_{11}(A,B)$ jest dodatnio określona, zatem macierze A i B posiadają wspólne rozwiązanie Lapunowa.

Ponieważ macierz $H_{22}(A,B)$ nie jest dodatnio określona zatem poszukiwane rozwiązanie P_ε uzyskamy z równania

$$A^* P_\varepsilon + P_\varepsilon A = -Q_\varepsilon,$$

w którym $Q_\varepsilon = \operatorname{diag}(1,\varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Macierz

$$\begin{aligned} B^* P_\varepsilon + P_\varepsilon B &= -\left(H_{11}(A,B) + \varepsilon H_{22}(A,B)\right) \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & 8-i+(8-i)\varepsilon \\ (8+i)\varepsilon+8+i & -10-20\varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

jest ujemnie określona dla $\varepsilon \in (-0,371; 1,448)$. Przyjmując np. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 13 & -6-17i \\ -6+17i & 39 \end{pmatrix}.$$

Faktycznie,

$$A^* P_{\frac{1}{2}} + P_{\frac{1}{2}} A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0$$

oraz

$$B^* P_{\frac{1}{2}} + P_{\frac{1}{2}} B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -20 & 24 - 3i \\ 24 + 3i & -40 \end{pmatrix} < 0.$$

Literatura

K.S. Narendra, J. Balakrishnan:
A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices,
IEEE Trans. Automat. Control, 39 (12) 1994

R.N. Shorten, K.S. Narendra:
Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear timeinvariant systems,
Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, 16 (10) 2002

R. Shorten, K.S. Narendra:
Necessary and sufficient conditions for common quadratic Lyapunov functions for a pair of stable LTI systems whose system matrices are in companion form,
IEEE Trans. Automat. Control, 48 (4) 2003

T.J. Laffey, H. Šmigoc:
Common solution to the Lyapunov equation for 2×2 complex matrices,
Linear Algebra Appl., 420 (2-3) 2007

S. Białas, M. Góra:
On the existence of a common solution to the Lyapunov equations,
Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 63 (1) 2015

Dziękuję za uwagę