

Wojciech Grabowski, Uniwersytet Łódzki, Katedra Modeli i Prognoz Ekonometrycznych

Aleksander Welfe, Uniwersytet Łódzki, Katedra Modeli i Prognoz Ekonometrycznych

MODEL TOBIT CVAR

**CZTERDZIESTA PIĄTA OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA
ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI**

Zakopane-Kościelisko, 6-13.IX.2016

Temat został sfinansowany z grantu Narodowego Centrum Nauki

MAESTRO 4: DEC-2013/08/A/HS4/00612

OD „KLASYCZNEJ” MIKROEKONOMETRII DO MIKROEKONOMETRII SZEREGÓW CZASOWYCH

1) PODSTAWOWE MODELE MIKROEKONOMETRII

- model probitowy/logitowy/komplementarny model log-log**
- model wielomianowy kategorii uporządkowanych**
- model wielomianowy nieuporządkowany**
- model regresji uciętej**
- model regresji cenzurowanej (tobitowy)**
- model z selekcją próby (Heckmana)**
- zagnieżdżony model logitowy**
- model frykcyjny**
- model licznikowy**

2) NAJPOPULARNIEJSZE ZASTOSOWANIA MODELI ZMIENNYCH JAKOŚCIOWYCH

- badanie decyzji konsumenckich,
- badanie decyzji podejmowanych przez przedsiębiorstwa,
- wyjaśnianie zachowań poszczególnych osób na rynku pracy,
- analiza zadowolenia konsumentów,
- analiza postaw wyborczych ludzi

3) MODELE ZMIENNYCH JAKOŚCIOWYCH ZNAJDUJĄ TAKŻE ZASTOSOWANIE W BADANIACH MAKROEKONOMICZNYCH

- wyjaśnienie przyczyn pojawienia się recesji,
- wyjaśnienie mechanizmów kierujących działaniami Banku Centralnego odnośnie zmiany stopy procentowej lub dokonania interwencji walutowej,
- analiza przyczyn powstania kryzysów walutowych lub pojawienia się niestabilności na rynku walutowym,
- wyjaśnianie mechanizmów kierujących decyzjami agencji ratingowych,
- znalezienie przyczyn pojawiania się bąbli spekulacyjnych.

MODEL TOBITOWY

$$y_t^* = \mathbf{x}_t \boldsymbol{\alpha} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (1)$$

$$y_t = y_t^* I\{y_t^* > 0\} \quad (2)$$

Zaproponowany przez Tobina (1958) model tobitowy (model regresji cenzurowanej) był pierwotnie zastosowany do analizy wydatków konsumenckich. Najczęściej wykorzystywany jest w badaniach mikroekonometrycznych, ale także podczas analizy zjawisk makroekonomicznych takich jak na przykład interwencje walutowe Banku Centralnego (por. Gawrońska-Nowak, Grabowski, Rzentarzewska, 2011).

DYNAMICZNE MODELE ZMIENNYCH JAKOŚCIOWYCH

AUTORZY	ARTYKUŁ	NAZWA MODELU	POSTAĆ MODELU
B. Eichengreen, M. Watson, R. Grossman (1985)	Bank rate policy under the interwar gold standard: a dynamic probit model, <i>The Economic Journal</i> , vol. 95, pp. 725-745	Dynamiczny model probitowy	$BR_t^* = \alpha BR_{t-1}^* + \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$
M. Dueker (2005)	Dynamic Forecasts of Qualitative Variables: A Qual-VAR Model of U.S. Recessions.” <i>Journal of Business and Economic Statistics</i> vol. 23(1), pp. 96-104	Model Qual-VAR	$\boldsymbol{\Pi}(L)\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ $\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_t \\ y_t^* \end{bmatrix},$
W. Grabowski, A. Welfe (2016a)	An exchange rate model with market pressures and a contagion effect, <i>Emerging Markets Finance and Trade</i> , vol. 52(12), forthcoming	Wektorowy model korekty błędem ze zmiennymi dwumianowymi	$\Delta \mathbf{Y}_t = \mathbf{A}\mathbf{B}^T \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{s=1}^{S-1} \gamma_s \Delta \mathbf{Y}_{t-s} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ $\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_t \\ y_t^* \end{bmatrix},$

<p>W. Grabowski, A. Welfe (2016b)</p>	<p>Model Tobit-CVAR, <i>Artykuł prezentowany na 45-tej konferencji zastosowań matematyki, Zakopane 2016</i></p>	<p>Wektorowy model korekty błędem ze zmiennymi cenzurowanymi</p>	$\Delta \mathbf{Y}_t = \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}_{t-1} + \sum_{s=1}^{S-1} \gamma_s \Delta \mathbf{Y}_{t-s} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ $\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_t \\ y_t^* \end{bmatrix},$
---	---	--	---

MODEL TOBIT-CVAR – ESTYMACJA PARAMETRÓW

ALGORYTM EM

ALGORYTM ITERACYJNY

- 1) Dla początkowych wartości na zmiennych nieobserwowalnych oraz dla danej liczby relacji kointegrujących, parametry macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_S, \boldsymbol{\Sigma}$ uzyskiwane są za pomocą metody regresji zredukowanego rzędu Anderssona-Johansena (Johansen, 1996).
- 2) Następnie obliczane są wartości teoretyczne dla zmiennej cenzurowanej jako wartości oczekiwane w rozkładzie uciętym:

$$\hat{y}_t^{*(i+1)} = \begin{cases} y_t & \text{if } y_t^* > 0, \\ \hat{y}_{t-1}^{*(i+1)} + \hat{\mathbf{z}}_t^{(i+1)} - \frac{\varphi(\hat{y}_{t-1}^{*(i+1)} + \hat{\mathbf{z}}_t^{(i+1)})}{1 - \Phi(\hat{y}_{t-1}^{*(i+1)} + \hat{\mathbf{z}}_t^{(i+1)})}, \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_t^{(i+1)} = \left[\hat{\mathbf{A}}^{(i+1)} (\hat{\mathbf{B}}^{(i+1)})^T \right]_{\{M+1\}} \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_{t-1} \\ \hat{\mathbf{y}}_{t-1}^{*(i+1)} \end{array} \right] + \sum_{s=1}^{S-1} \left[\hat{\mathbf{y}}_s^{(i+1)} \right]_{\{M+1\}} \left[\begin{array}{c} \Delta \mathbf{X}_{t-s} \\ \Delta \hat{\mathbf{y}}_{t-s}^{*(i+1)} \end{array} \right]$$

TESTOWANIE WYMIARU PRZESTRZENI KOINTEGRACYJNEJ

$$TRACE = -T \sum_{i=r+1}^M \ln(1 - \hat{\lambda}_i),$$

$$|\lambda \mathbf{S}_{11}^* - \mathbf{S}_{10}^* \mathbf{S}_{00}^{*-1} \mathbf{S}_{01}^*| = 0$$

$$\mathbf{S}_{11}^* = T^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T (y_{t-1})^2 & \sum_{t=1}^T y_{t-1} \mathbf{x}_{t-1} \\ \sum_{t=1}^T \mathbf{x}'_{t-1} y_{t-1} & \sum_{t=1}^T \mathbf{x}'_{t-1} \mathbf{x}_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{00}^* = T^{-1} \begin{bmatrix} (\Delta y_t)^2 & \Delta y_t \Delta \mathbf{x}_t \\ (\Delta \mathbf{x}_t)' \Delta y_t & (\Delta \mathbf{x}_t)' \Delta \mathbf{x}_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{01}^* = T^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \Delta y_t y_{t-1} & \sum_{t=1}^T \Delta y_t \mathbf{x}_{t-1} \\ \sum_{t=1}^T (\Delta \mathbf{x}_t)' y_{t-1} & \sum_{t=1}^T (\Delta \mathbf{x}_t)' \mathbf{x}_{t-1} \end{bmatrix}$$

ALTERNATYWNY ROZKŁAD ASYMPTOTYCZNY DLA STATYSTYKI ŚLADU

PRZYPADEK: BEZ ZMIENNYCH CENZUROWANYCH

$$TRACE \xrightarrow{D} tr \left(\left[\int_0^1 \mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' dr \right]^{-1} \int_0^1 d\mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\int_0^1 d\mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' \right)' \right)$$

PRZYPADEK: UDZIAŁ ZMIENNYCH CENZUROWANYCH WYNOSI q

$$TRACE \xrightarrow{D} tr \left(\left[\int_0^q \mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' dr \right]^{-1} \int_0^q d\mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\int_0^q d\mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' \right)' \right) +$$
$$tr \left(\left[\int_q^1 \mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' dr \right]^{-1} \int_q^1 d\mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\int_q^1 d\mathbf{W}(r) \mathbf{W}(r)' \right)' \right)$$

ALTERNATYWNE WARTOŚCI KRYTYCZNE DLA STATYSTYKI TESTU ŚLADU

M-r	Model bez wyrazu wolnego			Model z wyrazem wolnym ograniczonym do przestrzeni kointegrującej		
	0%	20%	50%	0%	20%	50%
1	4.62	4.73	6.89	13.77	14.13	18.12
2	9.52	9.61	12.33	22.36	22.98	26.90
3	16.12	16.25	21.45	36.05	36.99	45.68
4	23.95	24.06	29.87	49.71	50.37	58.92
5	37.03	37.17	42.35	75.29	76.12	86.89
6	51.26	51.37	57.82	105.95	106.98	115.98
7	69.26	71.01	78.93	129.60	130.98	142.39
8	82.57	82.98	85.49	166.40	167.56	179.54

WSKAŹNIK PRESJI NA RYNKU WALUTOWYM

$$EMP_t = w_1 \left(\frac{EX_t - EX_{t-1}}{EX_{t-1}} \right) - w_2 \left(\frac{RS_t - RS_{t-1}}{RS_{t-1}} \right) + w_3 \left((I_t - I_t^f) - (I_{t-1} - I_{t-1}^f) \right),$$

$$EMS_t = w_1 \left(\frac{EX_t - \tilde{EX}_t}{\tilde{EX}_t} \right) - w_2 \left(\frac{RS_t - \tilde{RS}_t}{\tilde{RS}_t} \right) + w_3 \left((I_t - I_t^f) - (\tilde{I}_t - \tilde{I}_t^f) \right),$$

$$N_t = \max(0, EMS_t - \hat{\mu}(EMS) - \hat{\sigma}(EMS))$$

DŁUGOOKRESOWE RELACJE KOINTEGRUJĄCE

$$N_t^* + \beta_1(wig_t - dax_t) + \beta_2 CTG_t + \beta_3 \Delta x_t = \varepsilon_{1t}$$

$$ex_t + \theta_1(I_t - I_t^f) + \theta_2(CDS_t - CDS_t^f) + \theta_3 N_t^* = \varepsilon_{2t}$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{B}}'[y_{t-1}^* \quad \mathbf{y}_{t-1}]') = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.04 \\ (-3.14) & (-2.06) \\ 0.10 & -0.10 \\ (1.79) & (-1.96) \\ -1.08 & -0.70 \\ (-2.51) & (-3.32) \end{bmatrix} x$$

$$\begin{bmatrix} N_{t-1}^* + 0.156 - 0.049(wig_{t-1} - dax_{t-1}) - 0.012 CTG_{t-1} + 0.052 \Delta x_{t-1} \\ (6.08) \quad (-5.90) \quad (-1.91) \quad (1.70) \\ ex_{t-1} - 1.24 - 0.361 N_{t-1}^* + 0.016(I_{t-1} - I_{t-1}^f) - 0.045(CDS_{t-1} - CDS_{t-1}^f) \\ (35.66) \quad (1.98) \quad (2.15) \quad (-2.94) \end{bmatrix}$$

LITERATURA

- Dueker, M. 2005. "Dynamic Forecasts of Qualitative Variables: A Qual-VAR Model of U.S. Recessions." *Journal of Business and Economic Statistics* 23, no. 1: 96-104.
- Eichengreen B., Watson M., Grossman R. 1985. "Bank rate policy under the interwar gold standard: a dynamic probit model." *The Economic Journal*, 95: 725-745
- Gawrońska-Nowak B., Grabowski, W., Rzentarzewska K. 2011. „Efektywność interwencji walutowej w warunkach gospodarek transformowanych.” WYDAWNICTWO NAUKOWE „Scholar”, Warszawa.
- Grabowski, W., Welfe A. 2016. "An exchange rate model with market pressures and a contagion effect" *Emerging Markets Finance and Trade*, vol. 52, no. 12, forthcoming
- Johansen, S. 1996. "Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models". 2-nd ed. Oxford University Press. Oxford.
- Tobin, J. 1958. "Estimation of relationship for limited dependent variables." *Econometrica* 26, no. 1: 24-36.