Metody iteracyjne dla hiperbolicznych równań różniczkowo-funkcyjnych

Adrian Karpowicz

Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański

6 Wrzesień 2016

Zastosowania równań hiperbolicznych

- Nieliniowe równania hiperboliczne wykorzystywane są w dynamice gazów i cieczy, nadprzewodnictwie, technologii chemicznej i w wielu innych dziedzinach.
- Przykładowo rozchodzenie się fal elektromagnetycznych wzdłuż dwużyłowego przewodu opisywanie jest za pomocą równania telegrafistów

$$D_{tt}u = D_x(F(u)D_x u) + G'(u)D_x u.$$

Zastosowania równań hiperbolicznych

- Nieliniowe równania hiperboliczne wykorzystywane są w dynamice gazów i cieczy, nadprzewodnictwie, technologii chemicznej i w wielu innych dziedzinach.
- Przykładowo rozchodzenie się fal elektromagnetycznych wzdłuż dwużyłowego przewodu opisywanie jest za pomocą równania telegrafistów

$$D_{tt}u = D_x(F(u)D_x u) + G'(u)D_x u.$$

Kolejnym przykładem jest równanie opisujące jednowymiarowe rozchodzenie się ciepła w bryle sztywnej.

$$D_{xx}\theta = D_t\left(\frac{\tau_0}{\chi}C(\theta)D_t\theta\right) + \frac{1}{\chi}D_\theta\left[\int C(\theta)d\theta\right]D_t\theta.$$

- Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania dla zagadnienia Cauchy'ego dla hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu można opisać w języku półgrup.
- Równanie różniczkowe drugiego rzędu $D_{tt}u - \mathcal{L}u = f(t, x, u)$ (tutaj $\mathcal{L}$ jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu) jest przekształcane do układu równań pierwszego rzędu
-
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t, x, \mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

  a następnie teoria półgrup jest używana.

- Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania dla zagadnienia Cauchy'ego dla hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu można opisać w języku półgrup.
- Równanie różniczkowe drugiego rzędu $D_{tt}u - \mathcal{L}u = f(t,x,u)$ (tutaj $\mathcal{L}$ jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu) jest przekształcane do układu równań pierwszego rzędu
- $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t,x,\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

  a następnie teoria półgrup jest używana.

- Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania dla zagadnienia Cauchy'ego dla hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu można opisać w języku półgrup.
- Równanie różniczkowe drugiego rzędu $D_{tt}u - \mathcal{L}u = f(t,x,u)$ (tutaj $\mathcal{L}$ jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu) jest przekształcane do układu równań pierwszego rzędu
- $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t,x,\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

  a następnie teoria półgrup jest używana.

- Kolejną metodą jest użycie teori rodziń sinusowych i cosinusowych.
- Jeśli $a > 0$ jest stałą oraz $f(t, x, \cdot)$ jest odpowiednim operatorem wówczas zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego $D_{tt}u - a^2 D_{xx}u = f(t, x, u)$ może być zapisane w postaci zagadnienia abstrakcyjnego

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t, u_t), \\ u(0) = u^0, \quad \frac{d}{dt}u(0) = u^1, \end{cases} \tag{1}$$

- gdzie u_t jest operatorem Hale'a

$$u_t(s) = u(t+s)$$

oraz operator różniczkowy $\mathcal{A}$ generuje rodzine cosinusową $C(t)$.
- Rozwiązanie zagadnienia (1) spełnia równanie całkowe

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int_0^t S(t-s)f(s, u_s)ds,$$

gdzie $S(t) = \int_0^t C(s)ds$ jest rodziną sinusową

- Kolejną metodą jest użycie teori rodziń sinusowych i cosinusowych.
- Jeśli $a > 0$ jest stałą oraz $f(t, x, \cdot)$ jest odpowiednim operatorem wówczas zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego $D_{tt}u - a^2 D_{xx}u = f(t, x, u)$ może być zapisane w postaci zagadnienia abstrakcyjnego

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t, u_t), \\ u(0) = u^0, \quad \frac{d}{dt}u(0) = u^1, \end{cases} \tag{1}$$

- gdzie u_t jest operatorem Hale'a

$$u_t(s) = u(t+s)$$

oraz operator różniczkowy $\mathcal{A}$ generuje rodzine cosinusową $C(t)$.
- Rozwiązanie zagadnienia (1) spełnia równanie całkowe

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int_0^t S(t-s)f(s, u_s)ds,$$

gdzie $S(t) = \int_0^t C(s)ds$ jest rodziną sinusową

- Kolejną metodą jest użycie teori rodziń sinusowych i cosinusowych.
- Jeśli $a > 0$ jest stałą oraz $f(t,x,\cdot)$ jest odpowiednim operatorem wówczas zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego $D_{tt}u - a^2 D_{xx}u = f(t,x,u)$ może być zapisane w postaci zagadnienia abstrakcyjnego

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t,u_t), \\ u(0) = u^0, \quad \frac{d}{dt}u(0) = u^1, \end{cases} \tag{1}$$

- gdzie u_t jest operatorem Hale'a

$$u_t(s) = u(t+s)$$

oraz operator różniczkowy $\mathcal{A}$ generuje rodzine cosinusową $C(t)$.
- Rozwiązanie zagadnienia (1) spełnia równanie całkowe

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u_s)ds,$$

gdzie $S(t) = \int_0^t C(s)ds$ jest rodziną sinusową

- Kolejną metodą jest użycie teori rodziń sinusowych i cosinusowych.
- Jeśli $a > 0$ jest stałą oraz $f(t, x, \cdot)$ jest odpowiednim operatorem wówczas zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego $D_{tt}u - a^2 D_{xx}u = f(t, x, u)$ może być zapisane w postaci zagadnienia abstrakcyjnego

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t, u_t), \\ u(0) = u^0, \quad \frac{d}{dt}u(0) = u^1, \end{cases} \tag{1}$$

- gdzie u_t jest operatorem Hale'a

$$u_t(s) = u(t + s)$$

oraz operator różniczkowy $\mathcal{A}$ generuje rodzine cosinusową $C(t)$.
- Rozwiązanie zagadnienia (1) spełnia równanie całkowe

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int_0^t S(t - s)f(s, u_s)ds,$$

gdzie $S(t) = \int_0^t C(s)ds$ jest rodziną sinusową

- Jeśli chcemy przekształcić równanie cząstkowe do postaci (1) wtedy model funkcyjny staje się trudny i nienaturalny.
- Kolejną metodą dowodzenia twierdzeń o istnieniu rozwiązań dla równań hiperbolicznych jest metoda punktu stałego.
- W przypadku teori półgrup i teorii punktu stałego nie możemy zaobserwować zjawiska rozchodzenia się fali ze skończoną predkości, czy zasady Huygens.

- Jeśli chcemy przekształcić równanie cząstkowe do postaci (1) wtedy model funkcyjny staje się trudny i nienaturalny.
- Kolejną metodą dowodzenia twierdzeń o istnieniu rozwiązań dla równań hiperbolicznych jest metoda punktu stałego.
- W przypadku teori półgrup i teorii punktu stałego nie możemy zaobserwować zjawiska rozchodzenia się fali ze skończoną predkości, czy zasady Huygens.

- Jeśli chcemy przekształcić równanie cząstkowe do postaci (1) wtedy model funkcyjny staje się trudny i nienaturalny.
- Kolejną metodą dowodzenia twierdzeń o istnieniu rozwiązań dla równań hiperbolicznych jest metoda punktu stałego.
- W przypadku teori półgrup i teorii punktu stałego nie możemy zaobserwować zjawiska rozchodzenia się fali ze skończoną predkości, czy zasady Huygens.

Wprowadzenie

- Będziemy rozważać zagadnienie Cauchy'ego dla nielokalnego jednowymiarowego równania falowego.
- Model funkcyjny będzie zależał od zbioru generowanego przez bicharakterystyki.
- Istnienie i jednoznaczność otrzymamy w $W^{1,\infty}_{loc}$ topologii.

Wprowadzenie

- Będziemy rozważać zagadnienie Cauchy'ego dla nielokalnego jednowymiarowego równania falowego.
- Model funkcyjny będzie zależał od zbioru generowanego przez bicharakterystyki.
- Istnienie i jednoznaczność otrzymamy w $W^{1,\infty}_{loc}$ topologii.

Wprowadzenie

- Będziemy rozważać zagadnienie Cauchy'ego dla nielokalnego jednowymiarowego równania falowego.
- Model funkcyjny będzie zależał od zbioru generowanego przez bicharakterystyki.
- Istnienie i jednoznaczność otrzymamy w $W^{1,\infty}_{loc}$ topologii.

Klasyczne równanie falowe

Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego dla klasycznego równania falowego

$$\begin{cases} D_{tt}u - a^2 D_{xx}u = g \quad \text{w} \quad E, \\ u(0,x) = \phi(x), \quad D_t u(0,x) = \psi(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $E = [0, T] \times \mathbb{R}$, $a \in C^1(E)$, $a > 0$ na E oraz $g \in C(E)$.

Definicja bicharakterystyk

- Rozważmy bicharakterystyki η, θ dla równania hiperbolicznego (2) przechodzące przez $(t, x) \in E$.

$$\eta'(s) = a(s, \eta(s)), \qquad \eta(t) = x,$$
$$\theta'(s) = -a(s, \theta(s)), \qquad \theta(t) = x.$$

- Będziemy je oznaczali
$\eta = \eta(s) = \eta^{t,x}(s)$,
$\theta = \theta(s) = \theta^{t,x}(s)$, odpowiednio.

Definicja bicharakterystyk

- Rozważmy bicharakterystyki η, θ dla równania hiperbolicznego (2) przechodzące przez $(t, x) \in E$.

$$\eta'(s) = a(s, \eta(s)), \qquad \eta(t) = x,$$
$$\theta'(s) = -a(s, \theta(s)), \qquad \theta(t) = x.$$

- Będziemy je oznaczali
  $\eta = \eta(s) = \eta^{t,x}(s)$,
  $\theta = \theta(s) = \theta^{t,x}(s)$, odpowiednio.

- Można pokazać, że zagadnienie (2) jest równoważne równaniu punktu stałego

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\eta^{t,x}(s)}^{\theta^{t,x}(s)} \frac{g(s,y) - A(s,y)D_x u(s,y)}{B(s,y,t,x)} dyds \quad (3)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\eta^{t,x}(0)}^{\theta^{t,x}(0)} \frac{\psi(y) - a(0,y)\phi'(y)}{C(y,t,x)} dy + \phi(\theta^{t,x}(0)),$$

- gdzie $A(t,x) = D_t a(t,x) + a(t,x) D_x a(t,x)$ oraz

$$B(s,y,t,x) = a(\tau, \theta^{t,x}(\tau)) \exp\left(\int_\tau^s a(z, \eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(z))dz\right),$$
$$C(y,t,x) = a(s, \theta^{t,x}(s)) \exp\left(-\int_0^s D_x a(z, \eta^{s,\theta^{t,x}(s)}(z))dz\right).$$

- Tutaj $[s,t] \ni \tau \to y = \eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(s)$ oraz odwzorowanie odwrotne $y \mapsto \tau = T(y; s,t,x)$.

- Można pokazać, że zagadnienie (2) jest równoważne równaniu punktu stałego

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = & \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\eta^{t,x}(s)}^{\theta^{t,x}(s)} \frac{g(s,y) - A(s,y)D_x u(s,y)}{B(s,y,t,x)} dyds \qquad (3) \\
& + \frac{1}{2}\int_{\eta^{t,x}(0)}^{\theta^{t,x}(0)} \frac{\psi(y) - a(0,y)\phi'(y)}{C(y,t,x)} dy + \phi(\theta^{t,x}(0)),
\end{aligned}
$$

- gdzie $A(t,x) = D_t a(t,x) + a(t,x) D_x a(t,x)$ oraz

$$
B(s,y,t,x) = a(\tau, \theta^{t,x}(\tau)) \exp\left(\int_\tau^s a(z, \eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(z))dz\right),
$$

$$
C(y,t,x) = a(s, \theta^{t,x}(s)) \exp\left(-\int_0^s D_x a(z, \eta^{s,\theta^{t,x}(s)}(z))dz\right).
$$

- Tutaj $[s,t] \ni \tau \to y = \eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(s)$ oraz odwzorowanie odwrotne $y \mapsto \tau = T(y; s, t, x)$.

- Można pokazać, że zagadnienie (2) jest równoważne równaniu punktu stałego

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\eta^{t,x}(s)}^{\theta^{t,x}(s)} \frac{g(s,y) - A(s,y)D_x u(s,y)}{B(s,y,t,x)} dyds \quad (3)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\eta^{t,x}(0)}^{\theta^{t,x}(0)} \frac{\psi(y) - a(0,y)\phi'(y)}{C(y,t,x)} dy + \phi(\theta^{t,x}(0)),$$

- gdzie $A(t,x) = D_t a(t,x) + a(t,x) D_x a(t,x)$ oraz

$$B(s,y,t,x) = a(\tau, \theta^{t,x}(\tau)) \exp\left(\int_\tau^s a(z, \eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(z))dz\right),$$
$$C(y,t,x) = a(s, \theta^{t,x}(s)) \exp\left(-\int_0^s D_x a(z, \eta^{s,\theta^{t,x}(s)}(z))dz\right).$$

- Tutaj $[s,t] \ni \tau \to y = \eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(s)$ oraz odwzorowanie odwrotne $y \mapsto \tau = T(y; s,t,x)$.

Zależność funkcyjna

- Użyjemy reprezentacji całkowej (2) zagadnienia różniczkowo-funkcyjnego.
- Zależność funkcyjna będzie związania z obszarem zależności falowej.
- Niech $(t, x) \in E$ oraz $u \in C(E, \mathbb{R})$. Wtedy $u_{|E_{t,x}} : E_{t,x} \to \mathbb{R}$ jest obcięciem u do zbioru $E_{t,x}$, gdzie

$$E_{t,x} = \left\{ (s, y) \in [0, t] \times \mathbb{R} \colon \eta^{t,x}(s) \leq y \leq \theta^{t,x}(s) \right\} .$$

- Użyjemy reprezentacji całkowej (2) zagadnienia różniczkowo-funkcyjnego.
- Zależność funkcyjna będzie związania z obszarem zależności falowej.
- Niech $(t, x) \in E$ oraz $u \in C(E, \mathbb{R})$. Wtedy $u_{|E_{t,x}} : E_{t,x} \to \mathbb{R}$ jest obcięciem u do zbioru $E_{t,x}$, gdzie

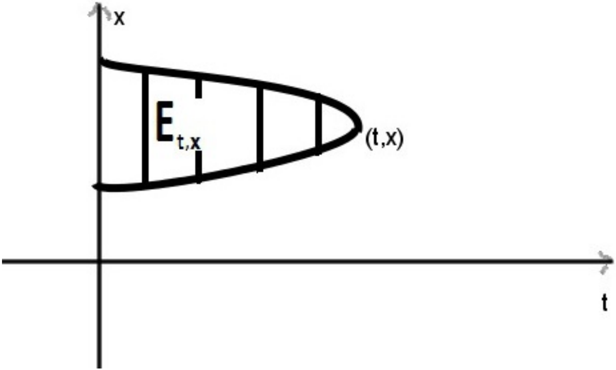
$$E_{t,x} = \left\{(s, y) \in [0, t] \times \mathbb{R} \colon \eta^{t,x}(s) \leq y \leq \theta^{t,x}(s)\right\}.$$

Zależność funkcyjna

- Użyjemy reprezentacji całkowej (2) zagadnienia różniczkowo-funkcyjnego.
- Zależność funkcyjna będzie związania z obszarem zależności falowej.
- Niech $(t,x) \in E$ oraz $u \in C(E,\mathbb{R})$. Wtedy $u_{|E_{t,x}} : E_{t,x} \to \mathbb{R}$ jest obcięciem u do zbioru $E_{t,x}$, gdzie

$$E_{t,x} = \left\{(s,y) \in [0,t] \times \mathbb{R} \colon \eta^{t,x}(s) \le y \le \theta^{t,x}(s)\right\}.$$

Zależność funkcyjna



Ze wzoru (3) na rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (2), widzimy, że wartości u w każdym punkcie $(t, x) \in E$ zależą tylko od wartości danych w ograniczonym obszarze $E_{t,x}$.

Zależność funkcyjna

Widzimy, ze warunek początkowy w punkcie $(0, x)$ oddziałuje jedynie na część rozwiązania w ograniczonym obszarze

$$\left\{(s, y) \in [0, t] \times \mathbb{R} \colon \theta^{t,x}(s) + x - \theta^{t,x}(0) \leq y \leq \eta^{t,x}(s) + x - \eta^{t,x}(0)\right\}.$$

Co ilustruje skończoną prędkość rozchodzenia się fali.

Równanie różniczkowo-funkcyjne

Zajmiemy się następującym zagadnieniem

$$\begin{cases} D_{tt}u(t,x) - a^2(t,x)D_{xx}u(t,x) = f(t,x,u_{|E_{t,x}}) \text{ dla } (t,x) \in E, \\ u(0,x) = 0, \quad D_t u(0,x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $a : E \to \mathbb{R}$ oraz $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$ dla wszystkich $(t,x) \in E$.

Równanie różniczkowo-funkcyjne

Zagadnienie Cauchy'ego (4) jest równoważne równaniu punktu stałego $u(t,x) = (Su)(t,x)$

$$(Su)(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\eta^{t,x}(s)}^{\theta^{t,x}(s)} \frac{f(s,y,u_{|E_{s,y}}) - A(s,y)D_x u(s,y)}{B(s,y,t,x)} dyds. \tag{5}$$

Równanie różniczkowo-funkcyjne

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $a \in C^1(E)$ *oraz* $a(t,x) > 0$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągłą i* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$.

c) *Istnieje nieujemna funkcja* $L \in C(E)$ *taka, że* $L(s,y) \le L(t,x)$ *dla* $E_{s,y} \subset E_{t,x}$ *oraz*

$$|f(t,x,w) - f(t,x,v)| \le L(t,x) \|w - v\|_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \ dla \ (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (4) *w klasie* $W^{1,\infty}_{loc}(E)$.

Równanie różniczkowo-funkcyjne

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $a \in C^1(E)$ *oraz* $a(t,x) > 0$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągłą i* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$.

c) *Istnieje nieujemna funkcja* $L \in C(E)$ *taka, że* $L(s,y) \leq L(t,x)$ *dla* $E_{s,y} \subset E_{t,x}$ *oraz*

$$|f(t,x,w) - f(t,x,v)| \leq L(t,x) ||w - v||_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \; dla \; (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (4) *w klasie* $W^{1,\infty}_{loc}(E)$.

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $a \in C^1(E)$ *oraz* $a(t,x) > 0$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągłą i* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$.

c) *Istnieje nieujemna funkcja* $L \in C(E)$ *taka, że* $L(s,y) \le L(t,x)$ *dla* $E_{s,y} \subset E_{t,x}$ *oraz*

$$|f(t,x,w) - f(t,x,v)| \le L(t,x) \|w - v\|_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \; dla \; (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (4) *w klasie* $W^{1,\infty}_{loc}(E)$.

Równanie różniczkowo-funkcyjne

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $a \in C^1(E)$ *oraz* $a(t,x) > 0$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągłą i* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$.

c) *Istnieje nieujemna funkcja* $L \in C(E)$ *taka, że* $L(s,y) \leq L(t,x)$ *dla* $E_{s,y} \subset E_{t,x}$ *oraz*

$$|f(t,x,w)-f(t,x,v)| \leq L(t,x)||w-v||_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \; dla \; (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (4) *w klasie* $W^{1,\infty}_{loc}(E)$.

Idea dowodu

- Rozważmy ciągi u^n, $D_t u^n$ i $D_x u^n$ zdefiniowane wzorami $u^0(t,x) = 0$, $D_x u^0(t,x) = 0$, $D_t u^0(t,x) = 0$ oraz

$$\begin{cases} u^{n+1}(t,x) = (Su^n)(t,x), \\ D_t u^{n+1}(t,x) = D_t(Su^n)(t,x), \\ D_x u^{n+1}(t,x) = D_x(Su^n)(t,x). \end{cases} \tag{6}$$

- Dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in E$ definiujemy seminormę $||\cdot||_t^0$ wzorem

$$||v||_t^0 = \sup_{\substack{(s,y) \in E_{t_0,x_0} \\ s \le t}} ||v||_{W^{1,\infty}(E_{s,y})}.$$

Idea dowodu

- Rozważmy ciągi u^n, $D_t u^n$ i $D_x u^n$ zdefiniowane wzorami $u^0(t,x) = 0$, $D_x u^0(t,x) = 0$, $D_t u^0(t,x) = 0$ oraz

$$\begin{cases} u^{n+1}(t,x) = (Su^n)(t,x), \\ D_t u^{n+1}(t,x) = D_t(Su^n)(t,x), \\ D_x u^{n+1}(t,x) = D_x(Su^n)(t,x). \end{cases} \tag{6}$$

- Dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in E$ definiujemy seminormę $||\cdot||_t^0$ wzorem

$$||v||_t^0 = \sup_{\substack{(s,y) \in E_{t_0,x_0} \\ s \leq t}} ||v||_{W^{1,\infty}(E_{s,y})}.$$

- Można pokazać
$$|u^{k+1}(t,x) - u^k(t,x)| \le \int_0^t K_1 ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds,$$
gdzie
$$K_1 = K_1(t_0,x_0) = C_0 \sup_{E_{s,y} \subset E_{t,x} \subset E_{t_0,x_0}} \frac{L(s,y) + |A(s,y)|}{2|B(s,y,t,x)|}.$$

- $$|D_t u^{k+1}(t,x) - D_t u^k(t,x)| \le \int_0^t K_2 ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds,$$
gdzie
$$K_2 = K_2(t_0,x_0)$$
$$= \sup_{E_{s,y} \subset E_{t,x} \subset E_{t_0,x_0}} \frac{L(s,y) + |A(s,y)|}{2|B(s,y,t,x)|} \left(C_0 \left| \frac{\partial B}{\partial t}(s,y,t,x) \right| + |D_t \theta(s;t,x)| + |D_t \eta(s;t,x)| \right).$$

- Można pokazać

$$|u^{k+1}(t,x) - u^k(t,x)| \leq \int_0^t K_1 ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds,$$

gdzie

$$K_1 = K_1(t_0, x_0) = C_0 \sup_{E_{s,y} \subset E_{t,x} \subset E_{t_0,x_0}} \frac{L(s,y) + |A(s,y)|}{2|B(s,y,t,x)|}.$$

- $$|D_t u^{k+1}(t,x) - D_t u^k(t,x)| \leq \int_0^t K_2 ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds,$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_2 =& K_2(t_0, x_0) \\ =& \sup_{E_{s,y} \subset E_{t,x} \subset E_{t_0,x_0}} \frac{L(s,y) + |A(s,y)|}{2|B(s,y,t,x)|} \left(C_0 \left| \frac{\partial B}{\partial t}(s,y,t,x) \right| \right. \\ & \left. + |D_t \theta(s;t,x)| + |D_t \eta(s;t,x)| \right). \end{aligned}$$

- $$|D_x u^{k+1}(t,x) - D_x u^k(t,x)| \le \int_0^t K_3 ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds,$$

  gdzie

  $$\begin{aligned} K_3 =& K_3(t_0, x_0) \\ =& \sup_{E_{s,y} \subset E_{t,x} \subset E_{t_0,x_0}} \frac{L(s,y) + |A(s,y)|}{2|B(s,y,t,x)|} \left(C_0 \left| \frac{\partial B}{\partial x}(s,y,t,x) \right| \right. \\ & \left. + |D_x \theta(s;t,x)| + |D_x \eta(s;t,x)| \right). \end{aligned}$$

- Let $K = K_1 + K_2 + K_3$. Z powyższych nierówności dostajemy

  $$||u^{k+1} - u^k||_t^0 \le \int_0^t K ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds. \qquad (7)$$

- $$|D_x u^{k+1}(t,x) - D_x u^k(t,x)| \leq \int_0^t K_3 ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds,$$

  gdzie

  $$\begin{aligned} K_3 =& K_3(t_0, x_0) \\ =& \sup_{E_{s,y} \subset E_{t,x} \subset E_{t_0,x_0}} \frac{L(s,y) + |A(s,y)|}{2|B(s,y,t,x)|} \left(C_0 \left| \frac{\partial B}{\partial x}(s,y,t,x) \right| \right. \\ & \left. + |D_x \theta(s;t,x)| + |D_x \eta(s;t,x)| \right). \end{aligned}$$

- Let $K = K_1 + K_2 + K_3$. Z powyższych nierówności dostajemy

  $$||u^{k+1} - u^k||_t^0 \leq \int_0^t K ||u^k - u^{k-1}||_s^0 ds. \qquad (7)$$

- Jeśli zastosujemy indukcje do (7) otrzymamy

$$||u^{k+1} - u^k||_t^0 \leq \frac{\tilde{C}}{k!}(tK)^k,$$

gdzie $\tilde{C} = ||u^1 - u^0||_{W^{1,\infty}(E_{t_0,x_0})}$.

- Stąd

$$||u^{k+1} - u^k||_{W^{1,\infty}(E_{t_0,x_0})} \leq \frac{\tilde{C}(t_0 K)^k}{k!}.$$

- Ostatecznie otrzymujemy, że u^n, $D_t u^n$ i $D_x u^n$ są zbieżne jednostajnie na E_{t_0,x_0}. Biorąc $n \to \infty$ w (6) dostajemy

$$u^n \to u,\ D_t u^n \to D_t u \text{ oraz } D_x u^n \to D_x u \text{ na } E_{t_0,x_0},$$

gdzie u jest rozwiązaniem (4).

Idea dowodu

- Jeśli zastosujemy indukcje do (7) otrzymamy

$$||u^{k+1} - u^k||_t^0 \leq \frac{\tilde{C}}{k!}(tK)^k,$$

gdzie $\tilde{C} = ||u^1 - u^0||_{W^{1,\infty}(E_{t_0,x_0})}$.

- Stąd

$$||u^{k+1} - u^k||_{W^{1,\infty}(E_{t_0,x_0})} \leq \frac{\tilde{C}(t_0K)^k}{k!}.$$

- Ostatecznie otrzymujemy, że u^n, $D_t u^n$ i $D_x u^n$ są zbieżne jednostajnie na E_{t_0,x_0}. Biorąc $n \to \infty$ w (6) dostajemy

$$u^n \to u,\ D_t u^n \to D_t u \text{ oraz } D_x u^n \to D_x u \text{ na } E_{t_0,x_0},$$

gdzie u jest rozwiązaniem (4).

Idea dowodu

- Jeśli zastosujemy indukcje do (7) otrzymamy

$$||u^{k+1} - u^k||_t^0 \leq \frac{\tilde{C}}{k!}(tK)^k,$$

gdzie $\tilde{C} = ||u^1 - u^0||_{W^{1,\infty}(E_{t_0,x_0})}$.

- Stąd

$$||u^{k+1} - u^k||_{W^{1,\infty}(E_{t_0,x_0})} \leq \frac{\tilde{C}(t_0 K)^k}{k!}.$$

- Ostatecznie otrzymujemy, że u^n, $D_t u^n$ i $D_x u^n$ są zbieżne jednostajnie na E_{t_0,x_0}. Biorąc $n \to \infty$ w (6) dostajemy

$$u^n \to u,\ D_t u^n \to D_t u \text{ oraz } D_x u^n \to D_x u \text{ na } E_{t_0,x_0},$$

gdzie u jest rozwiązaniem (4).

Idea dowodu

- Twierdzimy, że rozwiązanie istnieje na E.
- Rozwiązanie istnieje na $E_{T,x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcja η jest rosnąca θ jest malejąca, więc zbiór $E_{T,x_1} \cap E_{T,x_2}$ jest niepusty o ile odległość pomiędzy x_1 i x_2 jest wystarczająco mała.
- Z jednoznaczności istnieje tylko jedno rozwiązanie na $E_{T,x_1} \cap E_{T,x_2}$. Stąd dostajemy globalne rozwiązanie na E.

Idea dowodu

- Twierdzimy, że rozwiązanie istnieje na E.
- Rozwiązanie istnieje na $E_{T,x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcja η jest rosnąca θ jest malejąca, więc zbiór $E_{T,x_1} \cap E_{T,x_2}$ jest niepusty o ile odległość pomiędzy x_1 i x_2 jest wystarczająco mała.
- Z jednoznaczności istnieje tylko jedno rozwiązanie na $E_{T,x_1} \cap E_{T,x_2}$. Stąd dostajemy globalne rozwiązanie na E.

Idea dowodu

- Twierdzimy, że rozwiązanie istnieje na E.
- Rozwiązanie istnieje na $E_{T,x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcja η jest rosnąca θ jest malejąca, więc zbiór $E_{T,x_1} \cap E_{T,x_2}$ jest niepusty o ile odległość pomiędzy x_1 i x_2 jest wystarczająco mała.
- Z jednoznaczności istnieje tylko jedno rozwiązanie na $E_{T,x_1} \cap E_{T,x_2}$. Stąd dostajemy globalne rozwiązanie na E.

Zastosowania

- W oparciu o twierdzenie 1, badamy lokalnie istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} D_{tt}u(t,x) - (u(t,x)+1)^2 D_{xx}u(t,x) = f(t,x,u_{|E_{t,x}}) \text{ na } E, \\ u(0,x) = 0, \quad D_t u(0,x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{8}$$

- Współczynnik $(u+1)^2$ może być zastąpiony przez dowolną funkcję regularną $g : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $g(t,x,0) > 0$ dla $(t,x) \in E$.

Zastosowania

- W oparciu o twierdzenie 1, badamy lokalnie istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} D_{tt}u(t,x) - (u(t,x)+1)^2 D_{xx}u(t,x) = f(t,x,u_{|E_{t,x}}) \text{ na } E, \\ u(0,x) = 0, \quad D_t u(0,x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{8}$$

- Współczynnik $(u+1)^2$ może być zastąpiony przez dowolną funkcję regularną $g : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $g(t,x,0) > 0$ dla $(t,x) \in E$.

Zastosowania

- Zagadnienie (8) jest równoważne równaniu punktu stałego

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\eta^{t,x}(s)}^{\theta^{t,x}(s)} \frac{f(s,y,u_{|E_{s,y}}) - [D_t u + (u+1)D_x u]D_x u}{B(s,y,t,x)} dyds,$$

- gdzie η, θ zależyod u i spełnia równania różniczkowe zwyczajne

$$\eta'(s) = u(s,\eta(s)) + 1, \qquad \eta(t) = x,$$
$$\theta'(s) = -u(s,\theta(s)) - 1, \qquad \theta(t) = x,$$

oraz

$$B(s,y,t,x) = (u(\tau,\theta^{t,x}(\tau)) + 1)\exp\left(\int_\tau^s D_x u(z,\eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(z))dz\right).$$

Zastosowania

- Zagadnienie (8) jest równoważne równaniu punktu stałego

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\eta^{t,x}(s)}^{\theta^{t,x}(s)} \frac{f(s,y,u_{|E_{s,y}}) - [D_t u + (u+1)D_x u]D_x u}{B(s,y,t,x)} dyds,$$

- gdzie η, θ zależyod u i spełnia równania różniczkowe zwyczajne

$$\eta'(s) = u(s,\eta(s)) + 1, \qquad \eta(t) = x,$$
$$\theta'(s) = -u(s,\theta(s)) - 1, \qquad \theta(t) = x,$$

oraz

$$B(s,y,t,x) = (u(\tau,\theta^{t,x}(\tau)) + 1)\exp\left(\int_\tau^s D_x u(z,\eta^{\tau,\theta^{t,x}(\tau)}(z))dz\right).$$

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, ograniczona oraz* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) *Istniej stała L taka, że*

$$|f(t,x,w) - f(t,x,v)| \le L||w - v||_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \ dla \ (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (8) w klasie $W^{1,\infty}([0,t_0] \times \mathbb{R})$ *dla pewnego* $t_0 \in [0,T]$.

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, ograniczona oraz* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) *Istniej stała L taka, że*

$$|f(t,x,w) - f(t,x,v)| \leq L||w - v||_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \text{ dla } (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (8) *w klasie* $W^{1,\infty}([0,t_0] \times \mathbb{R})$ *dla pewnego* $t_0 \in [0,T]$.

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, ograniczona oraz* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) *Istniej stała L taka, że*

$$|f(t,x,w) - f(t,x,v)| \leq L||w - v||_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \; dla \; (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (8) *w klasie* $W^{1,\infty}([0,t_0] \times \mathbb{R})$ *dla pewnego* $t_0 \in [0,T]$.

Twierdzenie

Załóżmy, że

a) $f(\cdot,\cdot,0) : E \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, ograniczona oraz* $f(t,x,\cdot) : W^{1,\infty}(E_{t,x}) \to \mathbb{R}$ *dla* $(t,x) \in E$.

b) *Istniej stała L taka, że*

$$|f(t,x,w) - f(t,x,v)| \leq L||w-v||_{W^{1,\infty}(E_{t,x})} \; dla \; (t,x) \in E.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (8) *w klasie* $W^{1,\infty}([0,t_0] \times \mathbb{R})$ *dla pewnego* $t_0 \in [0,T]$.

Idea dowodu

- Rozważmy ciąg iteracji prostych u^n zdefiniowany przez $u^0(t,x) = 0$ oraz

$$\begin{cases} D_{tt}u^{n+1}(t,x) - (u^n(t,x)+1)^2 D_{xx}u^{n+1}(t,x) = f(t,x,u^{n+1}_{|E_{t,x}}), \\ u^{n+1}(0,x) = 0, \quad D_t u^{n+1}(0,x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

- Definiujemy bicharakterystyki η_n, θ_n dla równania (9)

$$\eta_n'(s) = u^n(s,\eta_n(s)) + 1, \qquad \eta_n(t) = x,$$
$$\theta_n'(s) = -u^n(s,\theta_n(s)) - 1, \qquad \theta_n(t) = x.$$

- Istnienie jednoznacznego rozwiązania zagadnienia (9) wynika z Twierdzenia 1, gdzie $a(t,x) = u^n(t,x) + 1$.

Idea dowodu

- Rozważmy ciąg iteracji prostych u^n zdefiniowany przez $u^0(t,x) = 0$ oraz

$$\begin{cases} D_{tt}u^{n+1}(t,x) - (u^n(t,x)+1)^2 D_{xx}u^{n+1}(t,x) = f(t,x,u^{n+1}_{|E_{t,x}}), \\ u^{n+1}(0,x) = 0, \quad D_t u^{n+1}(0,x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

- Definiujemy bicharakterystyki η_n, θ_n dla równania (9)

$$\eta_n'(s) = u^n(s,\eta_n(s)) + 1, \qquad \eta_n(t) = x,$$
$$\theta_n'(s) = -u^n(s,\theta_n(s)) - 1, \qquad \theta_n(t) = x.$$

- Istnienie jednoznacznego rozwiązania zagadnienia (9) wynika z Twierdzenia 1, gdzie $a(t,x) = u^n(t,x) + 1$.

Idea dowodu

- Rozważmy ciąg iteracji prostych u^n zdefiniowany przez $u^0(t,x) = 0$ oraz

$$\begin{cases} D_{tt}u^{n+1}(t,x) - (u^n(t,x)+1)^2 D_{xx}u^{n+1}(t,x) = f(t,x,u^{n+1}_{|E_{t,x}}), \\ u^{n+1}(0,x) = 0, \quad D_t u^{n+1}(0,x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

- Definiujemy bicharakterystyki η_n, θ_n dla równania (9)

$$\eta_n'(s) = u^n(s,\eta_n(s)) + 1, \qquad \eta_n(t) = x,$$
$$\theta_n'(s) = -u^n(s,\theta_n(s)) - 1, \qquad \theta_n(t) = x.$$

- Istnienie jednoznacznego rozwiązania zagadnienia (9) wynika z Twierdzenia 1, gdzie $a(t,x) = u^n(t,x) + 1$.

Idea dowodu

Lemat

- *Niech f spełnia założenia Twierdzenia 2 oraz* $u \in W^{1,\infty}([0,t_0] \times \mathbb{R})$ *jest takie, że* $u + 1 \geq K_1$ *oraz* $||u||_{W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})} \leq K_2$ *dla pewnych* $K_1 \in (0,1)$ *i* $K_2 > 0$
- *wtedy rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} D_{tt}v(t,x) - (u(t,x)+1)^2 D_{xx}v(t,x) = f(t,x,v_{|E_{t,x}}) \; na \; [0,t_0] \times \mathbb{R} \\ v(0,x) = 0, \quad D_t v(0,x) = 0 \quad dla \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

jest takie, że $v + 1 \geq K_1$ *oraz* $||v||_{W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})} \leq K_2$.

Idea dowodu

Lemat

- *Niech f spełnia założenia Twierdzenia 2 oraz* $u \in W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})$ *jest takie, że* $u+1 \geq K_1$ *oraz* $||u||_{W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})} \leq K_2$ *dla pewnych* $K_1 \in (0,1)$ *i* $K_2 > 0$
- *wtedy rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} D_{tt}v(t,x) - (u(t,x)+1)^2 D_{xx}v(t,x) = f(t,x,v_{|E_{t,x}}) \; na \; [0,t_0]\times\mathbb{R} \\ v(0,x)=0, \quad D_t v(0,x) = 0 \quad dla \quad x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

jest takie, że $v+1 \geq K_1$ *oraz* $||v||_{W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})} \leq K_2$.

Idea dowodu

Lemat

- *Niech f spełnia założenia Twierdzenia 2 oraz $u \in W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})$ jest takie, że $u+1 \geq K_1$ oraz $||u||_{W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})} \leq K_2$ dla pewnych $K_1 \in (0,1)$ i $K_2 > 0$*
- *wtedy rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} D_{tt}v(t,x) - (u(t,x)+1)^2 D_{xx}v(t,x) = f(t,x,v_{|E_{t,x}}) \ na\ [0,t_0]\times\mathbb{R} \\ v(0,x)=0, \quad D_t v(0,x) = 0 \quad dla \quad x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

jest takie, że $v+1 \geq K_1$ oraz $||v||_{W^{1,\infty}([0,t_0]\times\mathbb{R})} \leq K_2$.

A. Karpowicz and H. Leszczyński, *On the Cauchy problem for hyperbolic functional-differential equations.*, Annales Polonici Mathematici, 2015, Vol. 115, no. 1, s. 53-74

DZIĘKUJĘ