

Asymptotyka rozwiązań równania Schrödingera z losowym potencjałem

T. Komorowski, IMPAN, G. Bal, Columbia Univ.,
T. Chen, Univ. of Texas, Austin, L. Ryzhik, Stanford Univ.

9 września 2016

Równanie Schrödingera

Funkcja falowa $\phi(t, x)$ spełnia równanie

$$i\partial_t\phi(t, x) + \frac{1}{2}\Delta_x\phi(t, x) - V(t, x)\phi(t, x) = 0, \quad (1)$$

$$\phi(0, x) = \phi_0(x),$$

$V(t, x)$ - potencjał, $i = \sqrt{-1}$.

Motywacja:

- mechanika kwantowa,
- propagacja fal (**Gaussian beam**)

Klasyczny hamiltonian

$$E = \frac{|p|^2}{2m} + V(x), \quad p - \text{pęd}, V(x) - \text{potencjał}$$

Energia - pęd w mechanice kwantowej

$$E = \hbar\omega, \text{ wzór Plancka} \quad p = \hbar k, \text{ wzór de Broglie'a}$$

- k - wektor falowy:

$$k = 2\pi\lambda^{-1}\hat{k}, \quad \lambda \quad \text{długość fali}$$

- funkcja falowa - superpozycja fal płaskich

$$\Psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(k \cdot x - \omega(k)t)\} \hat{\Psi}(k) dk$$

$\omega(k)$ relacja dyspersji,

Klasyczny hamiltonian

$$E = \frac{|p|^2}{2m} + V(x), \quad p - \text{pęd}, V(x) - \text{potencjał}$$

Energia - pęd w mechanice kwantowej

$$E = \hbar\omega, \text{ wzór Plancka} \quad p = \hbar k, \text{ wzór de Broglie'a}$$

- k - wektor falowy:

$$k = 2\pi\lambda^{-1}\hat{k}, \quad \lambda \text{ długość fali}$$

- **funkcja falowa** - superpozycja fal płaskich

$$\Psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(k \cdot x - \omega(k)t)\} \hat{\Psi}(k) dk$$

$\omega(k)$ **relacja dyspersji**,

Pierwsze wyprowadzenie: mechanika kwantowa

c.d.

Różniczkując dostaniemy:

$$\partial_t \Psi(t, x) = -\frac{iE}{\hbar} \Psi(t, x), \quad \Delta_x \Psi(t, x) = -\frac{|p|^2}{\hbar^2} \Psi(t, x)$$

Stąd i ze wzoru na hamiltonian:

Równanie Schrödingera

$$i\hbar \partial_t \Psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \Psi(t, x) + V(x) \Psi(t, x).$$

Drugie wyprowadzenie: aproksymacja paraboliczna równania falowego

- **Równanie falowe**

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - \Delta_x \psi(t, x) = 0$$

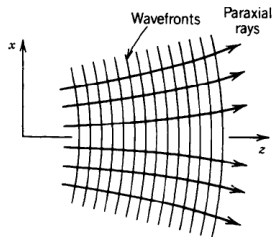
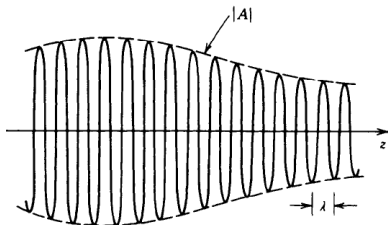
- $c(x)$ lokalna prędkość propagacji fali,

Aproksymacja paraboliczna

Aproksymacja paraksjalna (dla światła laserowego)

Fala monochromatyczna (pojedyncza częstość ω) jest **prawie płaska** (w kier. x_1 , gdzie $x = (x_1, x_\perp)$), t.j. funkcja falowa

$$\psi(t, x) = e^{i(\omega t - kx_1)} \phi(x_1, x_\perp) \quad \left| \partial_{x_1}^2 \phi(x) \right| \ll \left| \partial_{x_1} \phi(x) \right|$$



Równanie Schrödingera jako aproksymacja dla równania falowego

Zespolona amplituda $\phi(x_{\parallel}, x_{\perp})$ spełnia **równanie Schrödingera**

$$ki\partial_{x_{\parallel}}\phi(x_{\parallel}, x_{\perp}) + \Delta_{\perp}\phi(x_{\parallel}, x_{\perp}) + V(x_{\parallel}, x_{\perp})\phi(x_{\parallel}, x_{\perp}) = 0,$$

gdzie

$$V(x_{\parallel}, x_{\perp}) = k^2 + \left(\frac{\omega}{c(x_{\parallel}, x_{\perp})}\right)^2.$$

Skalowanie i losowy potencjał

- Obecność dwóch skal, mikro- i makroskopowych, $(t', x') \sim (t/\varepsilon, x/\varepsilon)$ (**skalowanie kinetyczne**),
- $V(t, x)$ potencjał dany przez pole losowe, **stacjonarne, gaussowskie**,
- równanie Schrödingera w makroskopowych współrzędnych, **funkcja falowa** $\phi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$:

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \phi_\varepsilon - \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon = 0, \quad (2)$$
$$\phi_\varepsilon(0, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi_0(x/\varepsilon).$$

- γ parametr odpowiadający wielkości pola (na ogół $\gamma \ll 1$, tzw. reżim **słabego sprzężenia**, ang. **weak coupling**),

Skalowanie i losowy potencjał

- Obecność dwóch skal, mikro- i makroskopowych, $(t', x') \sim (t/\varepsilon, x/\varepsilon)$ (**skalowanie kinetyczne**),
- $V(t, x)$ potencjał dany przez pole losowe, **stacjonarne**, **gaussowskie**,
- równanie Schrödingera w makroskopowych współrzędnych, **funkcja falowa** $\phi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$:

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \phi_\varepsilon - \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon = 0, \quad (2)$$
$$\phi_\varepsilon(0, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi_0(x/\varepsilon).$$

- γ parametr odpowiadający wielkości pola (na ogół $\gamma \ll 1$, tzw. reżim **słabego sprzężenia**, ang. **weak coupling**),

Skalowanie i losowy potencjał

- Obecność dwóch skal, mikro- i makroskopowych, $(t', x') \sim (t/\varepsilon, x/\varepsilon)$ (**skalowanie kinetyczne**),
- $V(t, x)$ potencjał dany przez pole losowe, **stacjonarne**, **gaussowskie**,
- równanie Schrödingera w makroskopowych współrzędnych, **funkcja falowa** $\phi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$:

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \phi_\varepsilon - \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon = 0, \quad (2)$$
$$\phi_\varepsilon(0, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi_0(x/\varepsilon).$$

- γ parametr odpowiadający wielkości pola (na ogół $\gamma \ll 1$, tzw. reżim **słabego sprzężenia**, ang. **weak coupling**),

Skalowanie i losowy potencjał

- Obecność dwóch skal, mikro- i makroskopowych, $(t', x') \sim (t/\varepsilon, x/\varepsilon)$ (**skalowanie kinetyczne**),
- $V(t, x)$ potencjał dany przez pole losowe, **stacjonarne**, **gaussowskie**,
- równanie Schrödingera w makroskopowych współrzędnych, **funkcja falowa** $\phi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$:

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \phi_\varepsilon - \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon = 0, \quad (2)$$
$$\phi_\varepsilon(0, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi_0(x/\varepsilon).$$

- γ parametr odpowiadający wielkości pola (na ogół $\gamma \ll 1$, tzw. reżim **słabego sprzężenia**, ang. **weak coupling**),

Granica $\phi_\varepsilon(t, x)$ przy $\varepsilon \ll 1$

- **Problem oscylacji.** Przy $\gamma = 0$ równanie na transformatę Fouriera $\hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi)$ ma postać

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi)}{\partial t} &= -\frac{\varepsilon i}{2} |\xi|^2 \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi), \\ \hat{\phi}_\varepsilon(0, \xi) &= \varepsilon^{d/2} \hat{\phi}_0(\varepsilon \xi).\end{aligned}\tag{3}$$

- $\Rightarrow \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi) = \varepsilon^{d/2} \hat{\phi}_0(\varepsilon \xi) e^{-i\varepsilon |\xi|^2 t/2}$

-

$$\phi_\varepsilon(t, x) = \left(\frac{1}{2i\pi t} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ i \frac{|x - \varepsilon y|^2}{2t\varepsilon} \right\} \phi_0(y) dy.$$

- Mamy $\|\phi_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ oraz $\phi_\varepsilon(t) \rightarrow 0$, słabo w $L^2(\mathbb{R}^d)$, przy $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Granica $\phi_\varepsilon(t, x)$ przy $\varepsilon \ll 1$

- **Problem oscylacji.** Przy $\gamma = 0$ równanie na transformatę Fouriera $\hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi)$ ma postać

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi)}{\partial t} &= -\frac{\varepsilon i}{2} |\xi|^2 \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi), \\ \hat{\phi}_\varepsilon(0, \xi) &= \varepsilon^{d/2} \hat{\phi}_0(\varepsilon \xi).\end{aligned}\tag{3}$$

- $\Rightarrow \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi) = \varepsilon^{d/2} \hat{\phi}_0(\varepsilon \xi) e^{-i\varepsilon |\xi|^2 t/2}$

-

$$\phi_\varepsilon(t, x) = \left(\frac{1}{2i\pi t} \right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ i \frac{|x - \varepsilon y|^2}{2t\varepsilon} \right\} \phi_0(y) dy.$$

- Mamy $\|\phi_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ oraz $\phi_\varepsilon(t) \rightharpoonup 0$, słabo w $L^2(\mathbb{R}^d)$, przy $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Skompensowana funkcja falowa

- G. Bal, T.K., L. Ryzhik (ARMA, 2011) wprowadziliśmy pojęcie **skompensowanej funkcji falowej**

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi/\varepsilon) e^{i|\xi|^2 t/(2\varepsilon)}, \quad (4)$$

- Wyniki dla potencjałów czasowo zależnych $V(t, x)$ typu **Ornstein-Uhlenbecka**. Kluczowe jest **tempo zbieżności funkcji korelacji** pola w czasie i przestrzeni (przejście fazowe).

Potencjały zależne od czasu

- $V(t, x)$ **scentrywane**, **stacjonarne**, **izotropowe**, **pole gaussowskie**

$$R(t, x) = \mathbb{E}[V(t + s, x + y)V(s, y)] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p + i\omega t} \hat{R}(\omega, p) d\omega dp,$$

$$\hat{R}(\omega, p) = \frac{2g(|p|)\hat{R}(|p|)}{\omega^2 + g^2(|p|)}. \quad (5)$$

- $g(|p|)$ **tempo mieszania** w czasie

$$R(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} e^{-g(|p|)|t|} \hat{R}(|p|) dp$$

Uproszczony model, skalowanie dyfuzyjne

Równanie bez laplasjanu

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} = \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon, \quad \phi_\varepsilon(0, x) = \phi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (6)$$

- $\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_0(x/\varepsilon) \exp(i\Phi_\varepsilon(t, x))$,

$$\Phi_\varepsilon(t, x) = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \int_0^t V\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_\varepsilon^2(t, x)] &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_0^s R\left(\frac{s-s'}{\varepsilon}, 0\right) ds ds' \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2 (2\pi)^d} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-g(|p|)s_2/\varepsilon} R(|p|) dp \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon (2\pi)^d} \int_0^t ds_1 \int_{\mathbb{R}^d} [1 - e^{-g(|p|)s_1/\varepsilon}] \frac{R(|p|)}{g(|p|)} dp \sim Dt \end{aligned}$$

Uproszczony model, skalowanie dyfuzyjne

Równanie bez laplasjanu

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} = \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon, \quad \phi_\varepsilon(0, x) = \phi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (6)$$

- $\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_0(x/\varepsilon) \exp(i\Phi_\varepsilon(t, x))$,

$$\Phi_\varepsilon(t, x) = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \int_0^t V\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_\varepsilon^2(t, x)] &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_0^s R\left(\frac{s-s'}{\varepsilon}, 0\right) ds ds' \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2 (2\pi)^d} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-g(|p|)s_2/\varepsilon} R(|p|) dp \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon (2\pi)^d} \int_0^t ds_1 \int_{\mathbb{R}^d} [1 - e^{-g(|p|)s_1/\varepsilon}] \frac{R(|p|)}{g(|p|)} dp \sim Dt \end{aligned}$$

Uproszczony model, skalowanie dyfuzyjne

Równanie bez laplasjanu

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} = \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon, \quad \phi_\varepsilon(0, x) = \phi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (6)$$

- $\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_0(x/\varepsilon) \exp(i\Phi_\varepsilon(t, x))$,

$$\Phi_\varepsilon(t, x) = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \int_0^t V\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_\varepsilon^2(t, x)] &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_0^s R\left(\frac{s-s'}{\varepsilon}, 0\right) ds ds' \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2 (2\pi)^d} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-g(|p|)s_2/\varepsilon} R(|p|) dp \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon (2\pi)^d} \int_0^t ds_1 \int_{\mathbb{R}^d} [1 - e^{-g(|p|)s_1/\varepsilon}] \frac{R(|p|)}{g(|p|)} dp \sim Dt \end{aligned}$$

Uproszczony model, skalowanie dyfuzyjne c.d.

- dla $\varepsilon \ll 1$, $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$ (dyfuzyjna skala czasu $t \sim \gamma^{-2}$) mamy

$$\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_0(x/\varepsilon) \exp(i\Phi_\varepsilon(t, x)),$$

$$\mathbb{E}[\Phi_\varepsilon^2(t, x)] \sim Dt$$

gdzie

$$D = \frac{2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{R(|p|)}{g(|p|)} dp < +\infty.$$

Skalowanie dyfuzyjne: pełny model

- Przypomnijmy;

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \phi_\varepsilon - \gamma V\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon = 0, \quad (7)$$
$$\phi_\varepsilon(0, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi_0(x/\varepsilon).$$

Twierdzenie 1 (przypadek dyfuzyjny), G. Bal, T.K., L. Ryzhik (ARMA, 2011)

- $V(t, x)$ jest polem **gaussowskim, markowowskim** w czasie,
- przestrzenne spektrum energetyczne** f. kowariancji $R(t, x)$ spełnia:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{R}(p) dp}{g(p)} < +\infty. \quad (8)$$

- $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$ ($t \sim \varepsilon^{-1} = \gamma^{-2}$ **skalowanie dyfuzyjne**).

Twierdzenie 1 c.d. (przypadek dyfuzyjny)

Wówczas:

- dla każdego $(t, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d}$

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon^d} \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi/\varepsilon) e^{i|\xi|^2 t / (2\varepsilon)}, \quad (9)$$

zbiega **wg rozkładu i wg momentów**, przy $\varepsilon \ll 1$ do

$$\hat{\zeta}(t, \xi) = e^{-tD_\xi/2} \hat{\phi}_0(\xi) + Z(t, \xi) \quad (10)$$

gdzie $Z(t, \xi)$ jest **scentrywaną gaussowską zmienną zespoloną** o wariancji

$$\mathbb{E}|Z(t, \xi)|^2 = \widehat{W}(t, \xi) - e^{-t\operatorname{Re}D_\xi} |\hat{\phi}_0(\xi)|^2.$$

Twierdzenie 1 c.d. (przypadek dyfuzyjny)

- $\widehat{W}(t, \xi) = \mathbb{E}|\widehat{\zeta}(t, \xi)|^2$ jest rozwiązaniem **jednorodnego równania kinetycznego**

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{W}(t, \xi) = \mathcal{L} \widehat{W}(t, \xi), \\ \widehat{W}(0, \xi) = |\widehat{\phi}_0(\xi)|^2. \end{cases} \quad (11)$$

- **operator rozpraszania**

$$\mathcal{L}F(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} D(p, \xi) [F(p + \xi) - F(\xi)] dp, \quad (12)$$

$$D(p, \xi) = \frac{2\widehat{R}(p)g(p)}{(2\pi)^d [g^2(p) + (\xi \cdot p - |p|^2/2)^2]} \quad (13)$$

$$D_\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2\widehat{R}(p)}{g(p) - i(\xi \cdot p - |p|^2/2)} \frac{dp}{(2\pi)^d}.$$

Skalowanie dyfuzyjne, uwagi:

- przypadek **izotropowy**, **spektrum potęgowe**

$$R(p) := \frac{a(p)}{|p|^{2\alpha+d-2}}, \quad \mathfrak{g}(|p|) := |p|^{2\beta}.$$

- warunek **skończonej energii** $\alpha < 1$, $\text{supp } a(\cdot)$ zwarty,
- **mieszanie po czasie**: $\beta \geq 0$,
- **przypadek dyfuzyjny**: $\alpha + \beta < 1$,
- **dekoherencja** fal.

Uproszczony model, skalowanie superdyfuzyjne

- $\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_0(x/\varepsilon) \exp(i\Phi_\varepsilon(t, x)),$

$$\Phi_\varepsilon(t, x) = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \int_0^t V\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_\varepsilon^2(t, x)] &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_0^s R\left(\frac{s-s'}{\varepsilon}, 0\right) ds ds' \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_0^{s_1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-|p|^{2\beta} s_2/\varepsilon} a(p) dp}{(2\pi)^d |p|^{2\alpha+d-2}} ds_2 ds_1. \end{aligned}$$

zmiana zmiennych

$$p = \frac{\varepsilon^{1/(2\beta)} q}{s_2^{1/(2\beta)}},$$

Uproszczony model, skalowanie superdyfuzyjne c.d.

- dla $\alpha + \beta > 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi_\varepsilon^2(t, x)] &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^{2-(1-\alpha)/\beta}} \frac{a(0)K_1(\alpha, \beta)}{(2\pi)^d} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} \frac{ds_2}{s_2^{(1-\alpha)/\beta}} \\ &= \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^{2-(1-\alpha)/\beta}} \frac{a(0)K_1(\alpha, \beta)}{(2\pi)^d} \frac{\beta^2 t^{(\alpha+2\beta-1)/\beta}}{(\alpha + \beta - 1)(\alpha + 2\beta - 1)} = Dt^{2\kappa}, \\ \kappa &= \frac{\alpha + 2\beta - 1}{2\beta} = 1 - \frac{1 - \alpha}{2\beta}, \\ \varepsilon &= \gamma^{1/(2\kappa)}.\end{aligned}\tag{14}$$

- $1/2 < \kappa < 1$ dla $\alpha < 1, \alpha + \beta > 1$
przypadek **superdyfuzyjny** $\gamma^{-1} \ll t \sim \gamma^{-\kappa} \ll \gamma^{-2}$

Uproszczony model, skalowanie superdyfuzyjne c.d.

- **Definicje** $K_1(\alpha, \beta)$, $K_2(\xi; \alpha)$

$$K_1(\alpha, \beta) = \Omega_d \int_0^{+\infty} e^{-\rho^{2\beta}} \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}, \quad (15)$$

gdzie Ω_d jest powierzchnią sfery jednostkowej w \mathbb{R}^d , oraz

$$K_2(\xi; \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho} \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i|\xi|\rho\omega \cdot e_1} S(d\omega), \quad (16)$$

Twierdzenie 2 (przypadek supedyfuzyjny, G. Bal, T.K., L. Ryzhik 11')

- Niech: $\alpha + \beta > 1$, $1/2 < \alpha < 1$ oraz $\beta \leq 1/2$, $\varepsilon = \gamma^{1/\kappa}$,

$$\kappa = \frac{\alpha + 2\beta - 1}{2\beta} = 1 - \frac{1 - \alpha}{2\beta}. \quad (17)$$

- Wówczas $\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi)$ zbiega **wg rozkładu i wg momentów** do

$$\bar{\zeta}_0(t, \xi) = \hat{\phi}_0(\xi) e^{i\sqrt{D_\xi} B_\kappa(t)}, \quad (18)$$

gdzie $B_\kappa(t)$ standardowy **ułamkowy ruch Browna** o wykładniku Hursta κ , wariancja D_ξ

Twierdzenie 2 c.d.

- dla $\beta < 1/2$

$$D_\xi = D = \frac{a(0)K_1(\alpha, \beta)}{\kappa(2\kappa - 1)(2\pi)^d}. \quad (19)$$

- dla $\beta = 1/2$

$$D_\xi = \frac{a(0)K_2(\xi; \alpha)}{\alpha(2\alpha - 1)(2\pi)^d}, \quad (20)$$

Twierdzenie 2 c.d.

- dla $\beta < 1/2$

$$D_\xi = D = \frac{a(0)K_1(\alpha, \beta)}{\kappa(2\kappa - 1)(2\pi)^d}. \quad (19)$$

- dla $\beta = 1/2$

$$D_\xi = \frac{a(0)K_2(\xi; \alpha)}{\alpha(2\alpha - 1)(2\pi)^d}, \quad (20)$$

- Skompensowane funkcja falowa

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} \hat{\phi}_\varepsilon \left(t, \frac{\xi}{\varepsilon} \right) e^{i|\xi|^2 t / (2\varepsilon)},$$

- asymptotyka gęstości energii

$$\mathbb{E} |\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi)|^2 = \frac{1}{\varepsilon^d} \mathbb{E} \left| \hat{\phi}_\varepsilon \left(t, \frac{\xi}{\varepsilon} \right) \right|^2 =: \widehat{W}_\varepsilon(t, \xi)$$

- zachodzi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \widehat{W}_\varepsilon(t, \xi) = \widehat{W}(t, \xi)$$

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{W}(t, \xi) = \mathcal{L} \widehat{W}(t, \xi), \\ \widehat{W}(0, \xi) = |\hat{\phi}_0(\xi)|^2. \end{cases}$$

Dyskusja: faza vs gęstość energii c.d.

- asymptotyka gęstości energii przy pomocy rozwiązania **równania transportu radiacyjnego** została pokazana **metodą diagramów Feynmana** przez H. Spohna (1975) dla potencjałów **czasowo niezależnych** i krótkich czasów, wynik poprawiony przez Erdösa-Yau (2000) do dowolnych czasów
- **metoda martyngałowa** z użyciem **zaburzonej funkcji próbnej** Bal-Papanicolaou-Ryzhik (2005), Bal-T.K.-Ryzhik (2013)
- Gomez (2011) pokazał, iż dla $\alpha + \beta > 1$, $\beta \in (0, 1/2]$ oraz $\alpha \in (1/2, 1]$ granica $\widehat{W}_\varepsilon(t, \xi)$ przy $\varepsilon \rightarrow 0+$ dla skal dyfuzyjnych ($t \sim \gamma^{-2}$, $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$) spełnia **jednorodne równanie transportu radiacyjnego** (przyp. skale superdyfuzyjne $t \sim \gamma^{-\kappa}$).
- Gęstość energii nie ma przejścia fazowego ze względu na skończoność

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{R}(p) dp}{|p|^2} < +\infty, \quad (\alpha + \beta < 1)!$$

Potencjały niezależne od czasu

- $V(x)$ **scentrowane**, **stacjonarne pole gaussowskie** nad p -nią probablistyczną $(\Omega, \mathcal{V}, \mathbb{P})$ o funkcji kowariancji

$$R(x) = \mathbb{E}[V(x)V(0)] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} \hat{R}(p) dp,$$

gdzie

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{R}(p) dp < +\infty, \quad \hat{R}(p) \geq 0, \quad \hat{R}(-p) = \hat{R}(p).$$

- **potencjał izotropowy**, szybko malejący

$$\hat{R}(p) = \frac{a(|p|)}{|p|^{d+2\alpha-2}} \quad \alpha < 1,$$

$a(0) > 0$, ciągła w 0, $\sup_{r>0} r^n a(r) < +\infty$ dla każdego $n > 0$.

Równanie na skompensowaną funkcję falową

Przypadek $\varepsilon = 1$

Skompensowana funkcja falowa spełnia

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(t, \xi) &= \hat{\psi}_0(\xi) - \frac{i}{(2\pi)^d} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\zeta}(s, \xi - p) \\ &\times \exp \left\{ i(|\xi|^2 - |\xi - p|^2) \frac{s}{2} \right\} \hat{V}(dp). \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie $\hat{V}(dp)$ **stochastyczna miara spektralna** dla stacjonarnego pola $V(x)$

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} \hat{V}(dp)$$

Szereg Duhamela

- Iterując dostaniemy rozwinięcie $\hat{\zeta}(t, \xi)$ w szereg nieskończony (**szereg Duhamela**) :

$$\hat{\zeta}(t, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\zeta}_n(t, \xi), \quad (22)$$

gdzie $\hat{\zeta}_0(t, \xi) = \hat{\psi}_0(\xi)$,

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_n(t, \xi) &= \left[\frac{-i}{(2\pi)^d} \right]^n \int_{\Delta_n(t)} ds_{1,n} \int_{\mathbb{R}^{dn}} \hat{V}(dp_1) \dots \hat{V}(dp_n) \\ &\times \hat{\psi}_0 \left(\xi - \sum_{j=1}^n p_j \right) e^{iG_n}, \end{aligned} \quad (23)$$

- faza

$$G_n = G_n(s_{1,n}, p_{1,n}) = \sum_{k=1}^n \left(\left| \xi - \sum_{j=1}^{k-1} p_j \right|^2 - \left| \xi - \sum_{j=1}^k p_j \right|^2 \right) \frac{s_{n+1-k}}{2}. \quad (24)$$

- $\Delta_n(t)$ sympleks

$$\Delta_n(t) = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq t\}.$$

Stwierdzenie

Zachodzi następujący wzór:

$$\mathbb{E}\zeta(t, \xi) = \hat{\psi}(\xi) \mathbb{M}\mathbb{E} \left\{ \exp \left\{ i \int_{\mathbb{R}^d} \hat{V}(dp) \int_0^t E(s, i, p; \xi) ds \right\} \right\}, \quad (25)$$

gdzie

$$E(s, p, z; \xi) := \exp \left\{ z(\sqrt{i}B(s) + s\xi) \cdot p \right\}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (26)$$

oraz $(B(t))$ jest standardowym d -wym. r. Browna nad p -nią $(\Sigma, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$, wartość oczekiwana \mathbb{M} ,

$$\sqrt{i} := \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Wzór na $\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi)$

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{\zeta}_{n,\varepsilon}(t, \xi)$$

$$\hat{\zeta}_{n,\varepsilon}(t, \xi) = \left[\frac{\varepsilon}{i(2\pi)^d} \right]^n \int_{\mathbb{R}^{dn}} \hat{V}(dp_1) \dots \hat{V}(dp_n)$$

$$\hat{\psi}_0 \left(\xi - \sum_{j=1}^n p_j \right) \int_{\Delta_n(t/\varepsilon^2)} ds_{1,n} e^{iG_n},$$

$$G_n = G_n(s_{1,n}, p_{1,n}) = \sum_{k=1}^n \left(\left| \xi - \sum_{j=1}^{k-1} p_j \right|^2 - \left| \xi - \sum_{j=1}^k p_j \right|^2 \right) \frac{s_{n+1-k}}{2}.$$

$$\mathbb{E}\zeta_\varepsilon(t, \xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\hat{\zeta}_{2n,\varepsilon}(t, \xi) = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{2n}} I_\varepsilon(\mathcal{F})(t) \right\} \hat{\psi}_0(\xi). \quad (27)$$

\mathfrak{F}_{2n} rodzina parowań (diagramów Feynmana) nad $\{1, \dots, 2n\}$

$$I_\varepsilon(\mathcal{F}) := \left(\frac{-\varepsilon^2}{(2\pi)^{2d}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^{2dn}} \prod_{(k,\ell) \in \mathcal{F}} \delta(p_k + p_\ell) \hat{R}(p_k) dp_{1,2n} \int_{\Delta_{2n}(t/\varepsilon^2)} e^{iG_{2n}} ds_{1,2n}$$

$$G_{2n}(s_{1,2n}, p_{1,2n}) = \sum_{m=1}^{2n} (s_{2n-m+1} - s_{2n-m}) \left(\xi \cdot \sum_{j=1}^m p_j - \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^m p_j \right|^2 \right),$$

przy czym $s_0 := 0$.

$$\mathbb{E}\zeta_\varepsilon(t, \xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\hat{\zeta}_{2n,\varepsilon}(t, \xi) = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{2n}} I_\varepsilon(\mathcal{F})(t) \right\} \hat{\psi}_0(\xi). \quad (27)$$

\mathfrak{F}_{2n} rodzina parowań (diagramów Feynmana) nad $\{1, \dots, 2n\}$

$$I_\varepsilon(\mathcal{F}) := \left(\frac{-\varepsilon^2}{(2\pi)^{2d}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^{2dn}} \prod_{(k,\ell) \in \mathcal{F}} \delta(p_k + p_\ell) \hat{R}(p_k) dp_{1,2n} \int_{\Delta_{2n}(t/\varepsilon^2)} e^{iG_{2n}} ds_{1,2n}$$

$$G_{2n}(s_{1,2n}, p_{1,2n}) = \sum_{m=1}^{2n} (s_{2n-m+1} - s_{2n-m}) \left(\xi \cdot \sum_{j=1}^m p_j - \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^m p_j \right|^2 \right),$$

przy czym $s_0 := 0$.

Funkcja spektralna typu Schoenberga

Przyjmijmy, iż

$$\hat{R}(r) = \int_1^{+\infty} e^{-\lambda^2 r^2/2} s(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda^{3-d-2\alpha}}, \quad (28)$$

gdzie

$$0 < c \leq s(\lambda) \leq c^{-1}, \quad \forall \lambda > 0, \quad c \in (0, 1)$$

Mamy też

$$\hat{R}(p) \sim \frac{c}{|p|^{d+2\alpha-2}}, \quad |p| \ll 1, \quad \hat{R}(p) \ll e^{-|p|^2}, \quad |p| \gg 1.$$

Funkcja spektralna typu Schoenberga c.d.

- Szukamy funkcji $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, iż

$$\sum_{i,j=1}^N f(|x_i - x_j|_H) \xi_i \xi_j^* \geq 0, \quad \forall N \geq 1, \xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{C},$$

$x_1, \dots, x_N \in H$, H nieskończenie wymiarowa óśrodkowa p-ń Hilberta $(H, |\cdot|)$,

- Schoenberg pokazał (A.of M. 1938), że wszystkie funkcje o tej własności są postaci

$$f(r) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r^2} \mu(d\lambda), \quad r \geq 0$$

gdzie μ jest skończoną miarą borelowską na $[0, +\infty)$.

Funkcja spektralna typu Schoenberga c.d.

- Szukamy funkcji $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, iż

$$\sum_{i,j=1}^N f(|x_i - x_j|_H) \xi_i \xi_j^* \geq 0, \quad \forall N \geq 1, \xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{C},$$

$x_1, \dots, x_N \in H$, H nieskończenie wymiarowa óśrodkowa p-ń Hilberta $(H, |\cdot|)$,

- Schoenberg pokazał (A.of M. 1938), że wszystkie funkcje o tej własności są postaci

$$f(r) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r^2} \mu(d\lambda), \quad r \geq 0$$

gdzie μ jest skończoną miarą borelowską na $[0, +\infty)$.

Zbieżność średnich skompensowanej funkcji falowej (s.f.f.)

- Przywróćmy skalowanie dyfuzyjne ($t \sim \gamma^{-2}$, równoważnie $\gamma^2 \sim \varepsilon$), s.f.f. po przeskalowaniu wygląda następująco

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon^d} \hat{\phi}_\varepsilon(t, \xi/\varepsilon) e^{i|\xi|^2 t / (2\varepsilon)},$$

gdzie, przy $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$ mamy

$$i\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \phi_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon = 0, \quad (29)$$
$$\phi_\varepsilon(0, x) = \varepsilon^{-d/2} \phi_0(x/\varepsilon).$$

Główny wynik 1

Twierdzenie

Przyjmijmy, iż $d \geq 3$, $\bar{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) := \mathbb{E}\zeta_\varepsilon(t, \xi)$ oraz

$$R_* := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{R}(|p|)}{|p|^2} dp < +\infty,$$

(t.j. $\alpha < 0$). Wówczas, istnieje $t_0 > 0$ takie, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \hat{\psi}_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{\kappa(\xi)t}{(2\pi)^{d/2}} \right\}, \quad t \in [0, t_0], \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (30)$$

gdzie

$$\kappa(\xi) = \int_1^\infty \frac{s(\lambda)d\lambda}{\lambda^{1-2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+i\tau)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{(\lambda|\xi|\tau)^2}{2(1+i\tau)} \right\} d\tau \right\}. \quad (31)$$

W szczególności gdy $\xi = 0$ dostajemy

$$\begin{aligned}\kappa(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+i\tau)^{d/2}} \int_1^\infty \frac{s(\lambda)d\lambda}{\lambda^{d-2\alpha}} = \frac{-2i}{d-2} \int_1^\infty \frac{s(\lambda)d\lambda}{\lambda^{d-2\alpha}}. \\ &= -i(2\pi)^{d/2} \frac{2d}{d-2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{R}(|p|)}{|p|^2} dp.\end{aligned}$$

Wynik 2: homogenizacja

Funkcja falowa $\phi(t, x)$ spełnia równanie

$$i\partial_t\phi(t, x) + \frac{1}{2}\Delta_x\phi(t, x) - \sqrt{\varepsilon}V(t, x)\phi(t, x) = 0, \quad (32)$$
$$\phi(0, x) = \varepsilon^{db/2}\phi_0(\varepsilon^b x),$$

gdzie $b \geq 0$. S.f.f. dana jest wzorem

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) := \varepsilon^{db/2}\hat{\phi}\left(\frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon^b\xi\right) e^{i\varepsilon^{2b-1}|\xi|^2 t/2}. \quad (33)$$

Wynik 2: homogenizacja

Funkcja falowa $\phi(t, x)$ spełnia równanie

$$i\partial_t\phi(t, x) + \frac{1}{2}\Delta_x\phi(t, x) - \sqrt{\varepsilon}V(t, x)\phi(t, x) = 0, \quad (32)$$
$$\phi(0, x) = \varepsilon^{db/2}\phi_0(\varepsilon^b x),$$

gdzie $b \geq 0$. S.f.f. dana jest wzorem

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) := \varepsilon^{db/2}\hat{\phi}\left(\frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon^b\xi\right) e^{i\varepsilon^{2b-1}|\xi|^2 t/2}. \quad (33)$$

Twierdzenie (homogenizacja)

Przyjmijmy, iż spełnione są założenia poprzedniego twierdzenia ($d \geq 3$). Wówczas, istnieje $t_0 > 0$ takie, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \|\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \cdot) - \bar{\zeta}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad t \in [0, t_0] \quad (34)$$

gdzie

$$\bar{\zeta}(t, \xi) := \hat{\phi}_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{\kappa(0)t}{(2\pi)^{d/2}} \right\}, \quad t \in [0, t_0], \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (35)$$

$$\kappa(0) = -i(2\pi)^{d/2} \frac{2d}{d-2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{R}(|p|)}{|p|^2} dp.$$

Wniosek: zachowanie funkcji falowej dla $b = 1/2$

- Funkcja falowa $\phi_\varepsilon(t, x)$ spełnia równanie

$$i\partial_t\phi_\varepsilon(t, x) + \frac{1}{2}\Delta_x\phi_\varepsilon(t, x) - \sqrt{\varepsilon}V(t, x)\phi_\varepsilon(t, x) = 0, \quad (36)$$
$$\phi_\varepsilon(0, x) = \varepsilon^{-d/4}\phi_0(\sqrt{\varepsilon}x),$$

Wówczas, dla $d \geq 3$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \|\phi_\varepsilon(t, \cdot) - \bar{\phi}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad t \in [0, t_0], \quad (37)$$

gdzie

$$i\partial_t\bar{\phi} + \frac{1}{2}\Delta_x\bar{\phi} + \bar{R}\bar{\phi} = 0, \quad \bar{R} := \frac{2dR_*}{(2\pi)^{d/2}(d-2)},$$

- **wynik G. Bal and N. Zhang, 14' przy dużo bardziej restrykcyjnych założeniach!**

- **superdyfuzyjne** skalowanie czasu $t \sim \varepsilon^{-a} (= \gamma^{-2a})$, $a \in (0, 1)$
- s.f.f. dana jest wzorem

$$\hat{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) := \varepsilon^{-db/2} \hat{\phi}(\varepsilon) \left(\frac{t}{\varepsilon^a}, \varepsilon^b \xi \right) e^{i\varepsilon^{(2b-a)} |\xi|^2 t/2}. \quad (38)$$

Główny wynik 3

Twierdzenie (skalowanie superdyfuzyjne)

Założmy, iż $d \geq 3$, $\alpha \in (0, 1)$ $b > a/2$ oraz $a := 2/(2 + \alpha)$.

Wówczas istnieje $t_0 > 0$ takie, że

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}(t, \xi) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) \\ &= \hat{\psi}_0(\xi) \mathbb{M} \exp \left\{ -\frac{\Re t^H}{4} \int_0^1 \int_0^1 |B_s - B_{s'}|^{2\alpha-2} ds ds' \right\}, \quad t \in [0, t_0].\end{aligned}\tag{39}$$

gdzie $H = 1/a = 1 + \alpha/2$, (B_t) jest standardowym d -wym. r. Browna oraz

$$\Re := \int_0^{+\infty} u^{\gamma/2-1} e^{iu} du = i\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \exp\left\{\frac{-i\alpha\pi}{2}\right\}, \tag{40}$$

(zachodzi $\operatorname{Re} \Re > 0$.)

- dla potencjałów typu Schoenberga

$$\bar{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \hat{\psi}_0(\xi) \mathbb{M} \left\{ \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_1^{+\infty} \frac{s(\lambda) d\lambda}{\lambda^{2-2\alpha}} \int_0^{t/\varepsilon^2} ds \int_0^{t/\varepsilon^2} ds' \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda^2 |p|^2/2} dp \exp \left\{ i \left[\sqrt{i} (B(s) - B(s')) + \xi(s - s') \right] \cdot p \right\} \right\} \right\}.$$

- wykonujemy uśrednianie po zmiennej p i dostajemy

$$\bar{\zeta}_\varepsilon(t, \xi) = \hat{\psi}_0(\xi) \mathbb{M} \left\{ \exp \left\{ -2^{d/2-1} \pi^{d/2} \int_1^{+\infty} Z_\varepsilon(\lambda, t) \frac{s(\lambda) d\lambda}{\lambda^{3-2\alpha}} \right\} \right\},$$

gdzie

$$Z_\varepsilon(\lambda, t) := \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} ds \int_0^{t/\varepsilon^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda^2} [B_\xi(s) - B_\xi(s')]^2 \right\} ds'$$

$$B_\xi(s) := \sqrt{i}B(s) + \xi s, \quad a^2 = \sum_{j=1}^d a_j^2.$$

- W sensie $L^2(\mathbb{P})$ zachodzi ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(\xi)}{(2\pi)^d}$$

- Dla $\xi = 0$ można to policzyć gdyż

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} |Z_\varepsilon(\lambda, t)|^2 = \left[\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right]^2,$$

Stąd

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{\zeta}_\varepsilon(t, 0)'' = \hat{\phi}_0(0) \exp \left\{ -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right\}.$$

- dla dowodu stosuje się **metodę diagramatyczną** (diagramy Feynmana)

- W sensie $L^2(\mathbb{P})$ zachodzi ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(\xi)}{(2\pi)^d}$$

- Dla $\xi = 0$ można to policzyć gdyż

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} |Z_\varepsilon(\lambda, t)|^2 = \left[\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right]^2,$$

Stąd

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{\zeta}_\varepsilon(t, 0)'' = \hat{\phi}_0(0) \exp \left\{ -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right\}.$$

- dla dowodu stosuje się **metodę diagramatyczną** (diagramy Feynmana)

- W sensie $L^2(\mathbb{P})$ zachodzi ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(\xi)}{(2\pi)^d}$$

- Dla $\xi = 0$ można to policzyć gdyż

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} |Z_\varepsilon(\lambda, t)|^2 = \left[\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right]^2,$$

Stąd

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{\zeta}_\varepsilon(t, 0)'' = \hat{\phi}_0(0) \exp \left\{ -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right\}.$$

- dla dowodu stosuje się **metodę diagramatyczną** (diagramy Feynmana)

- W sensie $L^2(\mathbb{P})$ zachodzi ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(\xi)}{(2\pi)^d}$$

- Dla $\xi = 0$ można to policzyć gdyż

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} Z_\varepsilon(\lambda, t) = -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} |Z_\varepsilon(\lambda, t)|^2 = \left[\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right]^2,$$

Stąd

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{\zeta}_\varepsilon(t, 0)'' = \hat{\phi}_0(0) \exp \left\{ -\frac{t\kappa(0)}{(2\pi)^d} \right\}.$$

- dla dowodu stosuje się **metodę diagramatyczną** (diagramy Feynmana)