Ciągi Okresowo Skorelowane z Wymiernymi Gęstościami i Modele PARMA

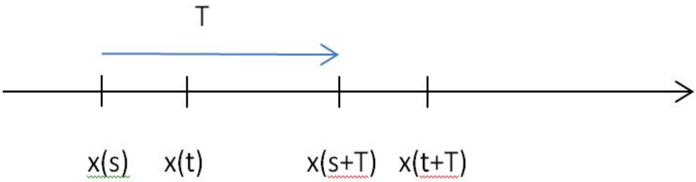
Andrzej Makagon
Hampton University

Zakopane, 2016

Ciąg zespolonych zmiennych losowych $(x(n))$, $n \in Z$, o średniej 0 nazywamy okresowo skorelowanym o okresie T (T-PC) jeśli dla każdego $n, m \in Z$,

$$R_x(n,m) = Ex(n)\overline{x(m)} = R_x(n+T, m+T)$$

tzn. jeśli $R_x(n+r, r)$ jest T-okresowy względem r,



T-PC $\ni (x(n)) \leftrightarrow (\boldsymbol{x}(n) = [x^k(n)]) \in$ T-wymiarowy stacjonarny

$$\ldots, x(-1), \underbrace{x(0), x(1), \ldots, x(T-1)}_{\boldsymbol{x}(0)}, \underbrace{x(T), \ldots, x(2T-1)}_{\boldsymbol{x}(1)}, x(2T), \ldots$$

STRUKTURA: $(x(n))$ jest T-PC wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przestrzen Hilberta $\mathcal{K} \supseteq M_x$, $x \in \mathcal{K}$, i dwa operatory unitarne U i V w $\mathcal{K}$ takie, że $V^T = I$, $UV = e^{2\pi i/T} VU$, i

$$x(n) = (1/T) \sum_{j=0}^{T-1} e^{-2\pi ijn/T} U^n V^j x.$$

SPEKTRUM:

$$a_j(n) = \sum_{r=0}^{T-1} e^{-2\pi ijr/T} R_x(n+r, r) = \int_0^{2\pi} e^{-itn} \gamma^j(dt)$$

FUNKCJA WYMIERNA: $F(z) = \frac{p_0+p_1 z+\cdots+p_n z^n}{q_0+q_1 z+\cdots+q_m z^m}$, $z \in \mathcal{C}$

FUNKCJA WYMIERNA ZMIENNEJ $t \in [0, 2\pi)$: $f(t) = F(e^{it})$, gdzie $F(z)$ jest funkcją wymierną na $\mathcal{C}$

PRZYKŁAD: $f(t) = \frac{1}{2+\cos 2t} = F(e^{it})$, $F(z) = \frac{z^2+2z-1}{2z}$

DEFINICJA: Mówimy, że T-PC ciąg ma *wymierne gęstości* jeśli $\gamma^j << dt$ i dla każdego $j = 0, \ldots, T-1$, $\frac{d\gamma^j}{dt}(t) = g^j(e^{it})$, jest wymierną funkcją zmiennej $t \in [0, 2\pi)$.

ZAGADNIENIE PROGNOZY: Znaleźć najlepszą liniową aproksymację $\hat{x}(n)$ zmiennej $x(n)$ znając $x(m)$, $m \leq n-1$, (tzn. znaleźć otrogonalną projekcję $\hat{x}(n)$ wektora $x(n)$ na $M_x(n-1) = \overline{\text{lin}}\{x(m) : m \leq n-1\}$).

METODA I (*innovation representation*): Znaleźć zbiór współczynników $c_k(n)$, $k \geq 0$, $n \in \mathcal{Z}$, taki, że

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(n)\xi_{n-k}$$

gdzie ξ_n są nieskorelowane ($\perp$) z jednostkową wariancją, $c_0(n)\xi_n \in M_x(n)$ i $c_0(n)\xi_n \perp M_x(n-1)$. Ciąg $(c_0(n)\xi_n)$ nazywa się *ciągiem odnowy* ciągu $(x(n))$ i reprezentuje błedy prognozy.

METODA II (reprezentacja PARMA): Przedstawić $(x(n))$ jako jedyne PC rozwiazanie systemu równań różnicowych

$$x(n) = -\sum_{j=1}^{l} a_j(n)x(n-j) + \sum_{j=0}^{r} b_j(n)\xi_{n-j}, \qquad a_0(n) \equiv 1, n \in \mathcal{Z},$$

takiego, że kiedy się go rozwiąża to $(b_0(n)\xi_n)$ jest ciągiem odnowy ciągu $(x(n))$. Mając reprezentację PARMA

$$\hat{x}(n) = -\sum_{j=1}^{l} a_j(n)x(n-j) + \sum_{j=1}^{r} b_j(n)\xi_{n-j}.$$

Pytania:

1. Które ciągi PC maja reprezentację PARMA?
2. Obliczyć współczynniki $a_j(n), b_j(n)$ znając funkcję auto-kowariancji lub spektrum ciagu $(x(n))$

.

System PARMA :

$$\sum_{j=0}^{l} a_j(n)x(n-j) = \sum_{j=0}^{r} b_j(n)\xi_{n-j}, \qquad n \in \mathcal{Z}, \tag{1}$$

$a_j(n), b_j(n) \in \mathcal{C}$ są T-okresowe względem n, $a_0(n) \equiv 1$, $n \in Z$, ξ_n są nieskorelowane z jednostkową wariancją.

Ciąg T-PC $(x(n))$ jest *a.c. PC rozwiązaniem* systemu (1) jeśli $x(n) \in M_\xi$ i miara spektralna ciągu $(x(n))$ jest absolutnie ciągła.

Jeśli ustawimy $a_j(n)$ w macierz $[A_L \ \ldots \ A_1 \ A_0]$ jak następuje

$$\left[\begin{array}{c|ccc|cccc}
\ldots & a_T(0) & \ldots & a_1(0) & a_0(0) & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & a_{T+1}(1) & \ldots & a_2(1) & a_1(1) & a_0(1) & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \mathbf{A(1)} & \ldots & \ldots & \mathbf{A(0)} & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & a_T(T-1) & a_{T-1}(T-1) & \ldots & \ldots & a_0(T-1)
\end{array}\right],$$

i zrobimy to samo dla $b_j(n)$'s definiując $[B_R \ \ldots \ B_1 \ B_0]$, to wtedy (1) można napisać jako VARMA system

$$\sum_{k=0}^{L} A_k \boldsymbol{x}(n-k)(t) = \sum_{k=0}^{R} B_k \boldsymbol{\xi}_{n-k}, \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{x}(n) = [x^k(n)]$, $x^k(n) = x(nT+k)$, $\boldsymbol{\xi}_n = [\xi_n^k]$, $\xi_n^k = \xi_{nT+k}$.

System (2), a więc również (1), jest kompletnie opisany przez dwie macierze wielomianowe $(A(z), B(z))$

$$A(z) = \sum_{k=0}^{L} A(k) z^k \quad \text{and} \quad B(z) = \sum_{k=0}^{R} B(k) z^k,$$

Jest dobrze znane i łatwe do pokazania, że (2) ma a.c. stacjonarne rozwiązanie *iff* $H(z) = (1/\sqrt{2\pi})A(z)^{-1}B(z)$ nie ma biegunów kole jednostkowym $D_1 = \{z \in \mathcal{C} : |z| = 1\}$ i wtedy gęstość rozwiązania jest dana przez $F(e^{it}) = H(e^{it})H(e^{it})^*$. Zauważmy że F jest wymierna.

Funkcja Przejścia (Transfer Function)

- Jeśli $(\boldsymbol{x}(n))$ is a.c. stacjonarny i $F(e^{it})$ jest jego gęstością to każda funkcja maciarzowa $H(e^{it})$ taka, że
$$F(e^{it}) = H(e^{it})H(e^{it})^*$$
jest nazywana *funkcją przejścia* ciągu stacjonarnego $(\boldsymbol{x}(n))$
- Jeśli $(x(n))$ is a.c. T-PC and $g(e^{it}) = (g^0(e^{it}), \ldots, g^{T-1}(e^{it}))$ jest jego gęstością to każda funkcja wektorowa
$h(e^{it}) = (h^0(e^{it}), \ldots, h^{T-1}(e^{it}))$ taka, że
$$g^j(e^{it}) = h(e^{it})h(e^{i(t+2\pi j/T)})^*$$
jest nazywana *funkcją przejścia* ciągu stacjonarnego $(x(n))$

Żeby odpowiedzieć na pytanie 1 i znaleźć zwiazek między F i g wystarczy znaleźć związek miedzy funkcjami przejść PC ciągu $(x(n))$ i stowarzyszonego ciągu stacjonarnego $(\boldsymbol{x}(n))$.

Twierdzenie 0 (Makagon and Miamee, 2013) Poniżej h i H oznaczają funkcje przejść $(x(n))$ i $(\boldsymbol{x}(n))$ i niech g i F będą ich gęstościami. Oznaczmy $z = e^{it}$ i $d = e^{2\pi i/T}$. Wtedy:

- $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{h}$: $h(z) = \sum_{k=0}^{T-1} z^k H^{k\cdot}(z^T)$,
- $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{H}$: $f_k(z) = (1/T)\sum_{j=0}^{T-1} z^{-k} d^{-kj} h(zd^j) = h_k(z^T)$, $H^{k\cdot}(z) = h_k(z)$,
- $\boldsymbol{g} \leftrightarrow \boldsymbol{F}$: $F^{j,k}(z^T) = (1/T^2) z^{k-j} \sum_{p=0}^{T-1} \sum_{q=0}^{T-1} d^{kq-jp} g^{\langle q-p\rangle}(zd^p)$, $g^k(z) = \sum_{p=0}^{T-1} \sum_{q=0}^{T-1} z^{p-q} d^{-qk} F^{p,q}(z^T)$.

Zauważmy, że h jest wymierna iff H jest wymierna.

Wniosek: g jest wymierna iff F jest wymierna.

TWIERDZENIE 1 PARMA system $(A(z), B(z))$ ma a.c. PC rozwiązanie $(x(n))$ iff $A(z)^{-1}B(z)$ nie ma biegunów na kole jednostkowym D_1. W tym przypadku rozwiązanie jest jedyne i ma wymierne gęstośći danę przez

$$g^j(e^{it}) = h(e^{it})h(e^{i(t+2\pi j/T)})^*, \quad e.a. \tag{3}$$

gdzie $h(z) = (1, z, \ldots, z^{T-1})H(z^T)$ i $H(z) = (1/\sqrt{2\pi})A(z)^{-1}B(z)$, $z = e^{it}$.

DEFINICJA: Ciąg PC nazywamy PARMA ciągiem jesli jest a.c. PC rozwiązaniem jakiegoś systemu PARMA.

PYTANIE: Czy każdy ciąg PC z wymiernymi gęstościami jest ciągiem PARMA?

TWIERDZENIE 2 Załóżmy, że $(x(n))$ jest T-PC i ma wymierne gęstości. Wtedy istnieje PARMA system $(A(z), B(z))$ taki, że:

1. wszystkie zera $A(z)$ leżą poza domkniętym dyskiem $D_{\leq 1} = \{z \in \mathcal{C} : |z| \leq 1\}$
2. wszystkie zera $B(z)$ leżą poza otwartym dyskiem $D_{<1} = \{z \in \mathcal{C} : |z| < 1\}$
3. macierze wielomianowe $A(z)$ and $B(z)$ są lewostronnie względnie pierwsze (tzn. ich jedyne lewostronne macierzowe podzielniki wielomianowe to macierze o stalym wyznaczniku),
4. $(x(n))$ jest jedynym T-PC rozwiązaniem systemu $(A(z), B(z))$.

DEFINICJA: System PARMA spelniający 1-4 nazywamy modelem PARMA ciągu dla $(x(n))$.

Dowód jest konstruktywny, tak że odpowiada on na pytanie 2.

KONSTRUKCJA: Załóżmy, że $(x(n))$ jest T-PC i ma wymierne gęstości $g^j(e^{it})$. Oznaczmy $z = e^{it}$ i $d = e^{2\pi i/T}$

1. Z Twierdzenia 0 znajdujemy gęstośc stowarzyszonego ciągu stacjonarnego $(\boldsymbol{x}(n))$,
   $F^{j,k}(z^T) = (1/T^2)z^{k-j}\sum_{p=0}^{T-1}\sum_{q=0}^{T-1} d^{kq-jp} g^{\langle q-p\rangle}(zd^p)$,
2. Piszemy $F(e^{it}) = H(e^{it})H(e^{it})^*$, gdzie $H(z)$ jest wymierna, nie ma biegunów w $D_{\leq 1}$ i nie ma zer w $D_{<1}$ (Rozanow, Hannan)
3. Znajdujemy lewostronnie względnie pierwsze macierze wielomianowe $A_0(z), B_0(z)$ takie, że $H(z) = (1/\sqrt{2\pi})A_0(z)^{-1}B_0(z)$ (Kaczorek)
4. Znajdujemy odwracalną macierz skalarną S i skalarną macierz unitarną U takie, że $SA_0(0)$ jest macierza dolnie trójkątną z jedynkami na przekątnej i macierz $SB_0(0)Q$ jest dolnie trójkątną, i definiujemy $A(z) = SA_0(z)$, $B(z) = SB_0(z)Q$

PARMA system $(A(z), B(z))$ jest PARMA modelem dla $(x(n))$.

PYTANIE: Czy każdy PARMA model jest PARMA reprezentacją ciągu $(x(n))$, tzn. czy dla każdego modelu $(b_0(n)\xi_n)$ jest ciągiem odnowy ciągu $(x(n))$? Moja odpowiedź jest *chyba tak*.

TWIERDZENIE 3 Załóżmy, że $(A(z), B(z))$ jest modelem PARMA dla T-PC ciągu $(x(n))$ i niech g^j będą jego wymiernymi gęstośicmi. Jeśli
(a) $\det B(z)$ nie jest identyczne zero (*miniphase assumption*), lub
(b) wyznacznik funkcji macierzowej $G(e^{it}) = [G^{j,k}(e^{it})]$, gdzie

$$G^{j,k}(e^{it}) = g^{\langle k-j \rangle}(e^{i(t+2\pi j/T)})$$

jest prawie wszędzie różny od zera, to wtedy $(A(z), B(z))$ jest reprezentacją PARMA ciągu $(x(n))$ i $(x(n))$ jest *full rank*.

UWAGA: Poniewaz $H(z) = (1/\sqrt{2\pi})A(z)^{-1}B(z)$ dla wielu par $(A(z), B(z))$, ten sam ciąg $(x(n))$ dopuszcza wiele reprezentacji PARMA (nawet jeśli założymy tzw. *invertibility*).

ZASTOSOWANIE: Szeregi czasowe (w przygotowaniu z Dr. Anną Dudek).

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Bibliography

- Hannan, E. J., Deistler, M.; The Statistical Theory of Linear Systems. SIAM (2012)
- Kaczorek, T.: Polynomial and Rational Matrices. Springer (2007)
- Makagon, A.: Periodically Correlated Sequences with Rational Densities and PARMA Models. To appear in: *Cyclostationarity: Theory and Methods II*, Lecture Notes in Mechanical Engineering, Springer
- Makagon, A., and Miamee, A.G.: Spectral Representation of Periodically Correlated Sequences. Probability Math. Stat. **33** no. 1, 175 – 188, (2013)
- Rozanov, Yu. A.: Stationary random Processes. Holden-Day Series in Time Series Analysis, Holsden-Day, (1967)