Rozwiązania przybliżone oraz zagadnienie odwrotne dla nieliniowej dyfuzji anomalnej

Łukasz Płociniczak

Wydział Matematyki, Politechnika Wrocławska

10.09.2016
XLV Konferencja Zastosowań Matematyki, Kościelisko

Wstęp

W referacie tym zajmować się będziemy zjawiskiem dyfuzji (w 1D) wilgoci w materiałach budowlanych (np. cegła krzemionkowa lub ceramiczna).

Wstęp

W referacie tym zajmować się będziemy zjawiskiem dyfuzji (w 1D) wilgoci w materiałach budowlanych (np. cegła krzemionkowa lub ceramiczna).

- Oznaczamy przez $u(x, t)$ koncentrację wilgoci w punkcie x i czasie t.
- Interesują nas następujące warunki:

$$u(0, t) = C, \quad u(x, 0) = 0.$$

Wstęp

W referacie tym zajmować się będziemy zjawiskiem dyfuzji (w 1D) wilgoci w materiałach budowlanych (np. cegła krzemionkowa lub ceramiczna).

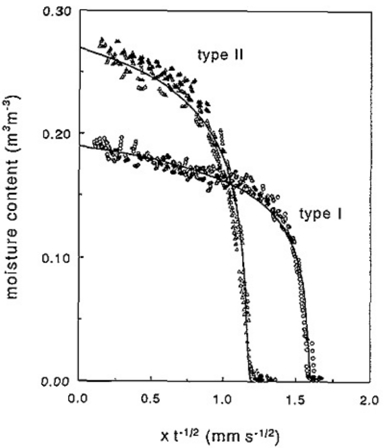
- Oznaczamy przez $u(x,t)$ koncentrację wilgoci w punkcie x i czasie t.
- Interesują nas następujące warunki:

$$u(0,t) = C, \quad u(x,0) = 0.$$

- **Samopodobieństwo** - charakterystyczna cecha dyfuzji w naszym eksperymencie. Wilgotność $u(x,t)$ dla różnych czasów możemy narysować na jednej krzywej [1]:

$$u(x,t) = U(\eta), \quad \eta = x/\sqrt{t},$$

dla $U(0) = C$ i $U(\infty) = 0$.



Natura jest przewrotna (a przez to bardzo ciekawa)!

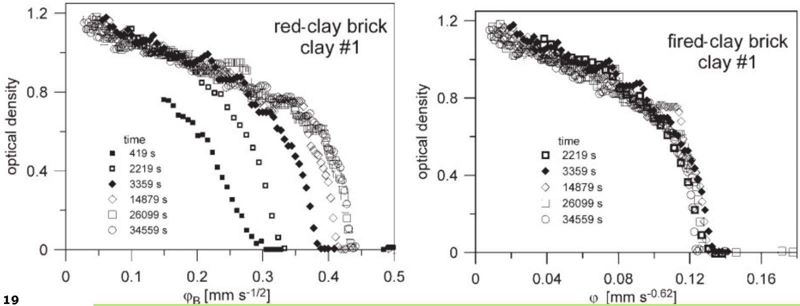
Natura jest przewrotna (a przez to bardzo ciekawa)!

- Okazuje się, że **nie wiadomo dlaczego**, ale dyfuzja nie zawsze przebiega w sposób, do którego przywykliśmy.
- W licznych eksperymentach (np. [2-4]) skalowanie $\eta = x/t^{1/2}$ (tzw. transformacja Boltzmanna) nie zostało zaobserwowane.

Natura jest przewrotna (a przez to bardzo ciekawa)!

- Okazuje się, że **nie wiadomo dlaczego**, ale dyfuzja nie zawsze przebiega w sposób, do którego przywykliśmy.
- W licznych eksperymentach (np. [2-4]) skalowanie $\eta = x/t^{1/2}$ (tzw. transformacja Boltzmanna) nie zostało zaobserwowane.
- Bardziej odpowiednie okazuje się samopodobieństwo **dyfuzji anomalnej** (rysunek z [2])

$$u(x,t) = U(\eta), \quad \eta = x/t^{\alpha/2}, \quad 0 < \alpha < 2.$$



Jak to opisać matematycznie?

Jak to opisać matematycznie?

- Standardowe równanie dyfuzji nie działa: dla naszych warunków brzegowych daje skalowanie $x/\sqrt{t}$.

Jak to opisać matematycznie?

- Standardowe równanie dyfuzji nie działa: dla naszych warunków brzegowych daje skalowanie $x/\sqrt{t}$.
- W [2,4] zaproponowano następującą modyfikację równania konstytutywnego określającego strumień

$$q = -D(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Rezultat: bardzo skomplikowane równania i średniej wielkości błędy dopasowania.

Jak to opisać matematycznie?

- Standardowe równanie dyfuzji nie działa: dla naszych warunków brzegowych daje skalowanie $x/\sqrt{t}$.
- W [2,4] zaproponowano następującą modyfikację równania konstytutywnego określającego strumień

$$q = -D(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

  Rezultat: bardzo skomplikowane równania i średniej wielkości błędy dopasowania.
- Bardziej odpowiednie okazało się zamodelowanie tego procesu równaniem z **pochodną ułamkową** (zob. [5-7])

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

  Otrzymujemy wtedy upragnione skalowanie $x/t^{\alpha/2}$ a błędy dopasowania rozwiązania do danych są bardzo małe.

Pochodna ułamkowa!?

- Będziemy stosowań następującą wersję pochodnej rzędu dowolnego (niekoniecznie α jest ułamkiem).
- **Pochodną ułamkową Riemanna-Liouville'a** rzędu α względem czasu z funkcji u definiujemy następującym wzorem

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(x,s) ds,$$

  gdzie $n = [\alpha] + 1$.
- Pochodna ta ma własności jakich należałoby oczekiwać po uogólnieniu standardowego operatora różniczkowania, np.

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}$$

  dla $\beta > -1$. Dodatkowo wszelkie własności pochodnej rzędu całkowitego są zachowane, gdy $\alpha \to k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Czy możemy powiedzieć coś analitycznie zamiast numerycznie?

- Wszystkie rezultaty dotyczące dyfuzji anomalnej w ośrodku porowatym otrzymane przez różnych Autorów sprowadzają się jedynie do numerycznego rozwiązania równania ułamkowego (co wcale nie jest trywialne).
- Udało się nam odnaleźć przybliżenia rozwiązania równania dyfuzji anomalnej w bardzo prostej, analitycznej postaci.

[10] **Ł.Płociniczak**, *Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. Derivation, approximation and applications*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 24 (1–3) (2015), 169-183.
[9] **Ł.Płociniczak**, *Approximation of the Erdelyi-Kober fractional operator with application to the time-fractional porous medium equation*, SIAM Journal of Applied Mathematics 74(4) (2014), 1219–1237.

[8] **Ł.Płociniczak, H.Okrasińska-Płociniczak**, *Approximate self-similar solutions to a nonlinear diffusion equation with time-fractional derivative*, Physica D 261 (2013), 85–91.

Zarys metody

- Model: równanie dyfuzji z pochodną ułamkową, dyfuzyjność $D(u) = D_0 u^m$ (od razu wprowadzamy odpowiednią skalę czasową)

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^m(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right), \quad 0 < \alpha < 1,$$

z warunkami $u(0,t) = 1$, $u(x,0) = 0$. **Uwaga:** Przy takich warunkach nie ma znaczenia czy używamy pochodną R-L czy Caputo.

Zarys metody

- Model: równanie dyfuzji z pochodną ułamkową, dyfuzyjność $D(u) = D_0 u^m$ (od razu wprowadzamy odpowiednią skalę czasową)

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^m(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right), \quad 0 < \alpha < 1,$$

  z warunkami $u(0,t) = 1$, $u(x,0) = 0$. **Uwaga:** Przy takich warunkach nie ma znaczenia czy używamy pochodną R-L czy Caputo.
- Szukamy rozwiązania samopodobnego $u(x,t) = U(\eta)$, gdzie $\eta = x/t^{\alpha/2}$. Otrzymujemy zwyczajne równanie całkowo-różniczkowe

$$\frac{d}{d\eta}\left(U^m(\eta)\frac{d}{d\eta}U(\eta)\right) = \left[(1-\alpha) - \frac{\alpha}{2}\eta\frac{d}{d\eta}\right] I_{-\frac{2}{\alpha}}^{0,1-\alpha} U(\eta),$$

  z warunkami $U(0) = 1$ oraz $U(\infty) = 0$, gdzie występuje opeartor Erdelyi-Kobera

$$I_c^{a,b} U(\eta) := \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^1 (1-z)^{b-1} z^a U(\eta z^{\frac{1}{c}}) dz.$$

Zarys metody c.d.

- Twierdzenie

  Dla U analitycznej oraz $a > -1$, $b > 0$, $c > 0$ mamy następujące rozwinięcie

$$I_c^{a,b} U(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!},$$

gdzie $\lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\Gamma\left(a+\frac{j}{c}+1\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{j}{c}+1\right)}$. *Ponadto, zachodzi poniższe rozwinięcie asymptotyczne, gdy* $k \to \infty$

$$\lambda_k \sim (-1)^k \frac{c}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b-1}{n} (-1)^n \Gamma\left(c(a+n+1)\right) \left(\frac{1}{k}\right)^{c(a+n+1)}.$$

Zarys metody c.d.

- Twierdzenie

  Dla U analitycznej oraz $a > -1$, $b > 0$, $c > 0$ mamy następujące rozwinięcie

$$I_c^{a,b} U(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k U^{(k)}(\eta) \frac{\eta^k}{k!},$$

gdzie $\lambda_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{\Gamma\left(a+\frac{j}{c}+1\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{j}{c}+1\right)}$. Ponadto, zachodzi poniższe rozwinięcie asymptotyczne, gdy $k \to \infty$

$$\lambda_k \sim (-1)^k \frac{c}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b-1}{n} (-1)^n \Gamma\left(c(a+n+1)\right) \left(\frac{1}{k}\right)^{c(a+n+1)}.$$

- Powyższe szeregi zbiegają bardzo szybko, zwłaszcza dla η bliskich 0. **Wykorzystajmy ten fakt!**

Zarys metody c.d.

- Nawet jak funkcja U nie jest analityczna, to możemy sądzić, że pierwsze wyrazy w rozwinięciu w szereg operatora E-K dadzą dobre przybliżenie.
- Zastosujmy to przybliżenie do naszego głównego równania. Otrzymamy wtedy

$$(U^m U')' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} U - \left(\frac{\alpha}{2}\lambda_0 - \lambda_1\right) \eta U',$$

  Już jest lepiej: równanie zwyczajne, chociaż nieliniowe.

Zarys metody c.d.

- Nawet jak funkcja U nie jest analityczna, to możemy sądzić, że pierwsze wyrazy w rozwinięciu w szereg operatora E-K dadzą dobre przybliżenie.
- Zastosujmy to przybliżenie do naszego głównego równania. Otrzymamy wtedy
$$(U^m U')' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} U - \left(\frac{\alpha}{2}\lambda_0 - \lambda_1\right) \eta U',$$
Już jest lepiej: równanie zwyczajne, chociaż nieliniowe.
- Kierując się intuicją oraz wcześniejszymi wynikami z sytuacji klasycznej możemy spodziewać się, że istnieje takie η^*, że $U(\eta^*) = 0$.

Zarys metody c.d.

- Nawet jak funkcja U nie jest analityczna, to możemy sądzić, że pierwsze wyrazy w rozwinięciu w szereg operatora E-K dadzą dobre przybliżenie.
- Zastosujmy to przybliżenie do naszego głównego równania. Otrzymamy wtedy
$$(U^m U')' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} U - \left(\frac{\alpha}{2}\lambda_0 - \lambda_1\right) \eta U',$$
Już jest lepiej: równanie zwyczajne, chociaż nieliniowe.
- Kierując się intuicją oraz wcześniejszymi wynikami z sytuacji klasycznej możemy spodziewać się, że istnieje takie η^*, że $U(\eta^*) = 0$.
- Warunki: $U(0) = 1$ oraz $U(\eta^*) = 0$.

Zarys metody c.d.

- Nawet jak funkcja U nie jest analityczna, to możemy sądzić, że pierwsze wyrazy w rozwinięciu w szereg operatora E-K dadzą dobre przybliżenie.
- Zastosujmy to przybliżenie do naszego głównego równania. Otrzymamy wtedy
$$(U^m U')' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} U - \left(\frac{\alpha}{2}\lambda_0 - \lambda_1\right) \eta U',$$
Już jest lepiej: równanie zwyczajne, chociaż nieliniowe.
- Kierując się intuicją oraz wcześniejszymi wynikami z sytuacji klasycznej możemy spodziewać się, że istnieje takie η^*, że $U(\eta^*) = 0$.
- Warunki: $U(0) = 1$ oraz $U(\eta^*) = 0$.
- **Problem:** nie znamy η^*, zatem mamy do rozwiązania problem ze swobodnym brzegiem.

Zarys metody c.d.

- Wykorzystamy metodę zaproponowaną w [10]: podstawmy

$$U(\eta) = \left(m(\eta^*)^2 y(z)\right)^{\frac{1}{m}}, \quad z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}.$$

Zarys metody c.d.

- Wykorzystamy metodę zaproponowaną w [10]: podstawmy

$$U(\eta) = \left(m(\eta^*)^2 y(z)\right)^{\frac{1}{m}}, \quad z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}.$$

- Równanie przyjmuje postać

$$\frac{1}{m}y'^2 + yy'' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}y + \frac{1}{m}\frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}(1-z)y'.$$

z warunkami **początkowymi** $y(0) = 0$ $y'(0) = \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}$.

Zarys metody c.d.

- Wykorzystamy metodę zaproponowaną w [10]: podstawmy

$$U(\eta) = \left(m(\eta^*)^2 y(z)\right)^{\frac{1}{m}}, \quad z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}.$$

- Równanie przyjmuje postać

$$\frac{1}{m}y'^2 + yy'' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}y + \frac{1}{m}\frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}(1-z)y'.$$

  z warunkami **początkowymi** $y(0) = 0$ $y'(0) = \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}$.
- Warunek na pochodną otrzymujemy z postaci równania.

Zarys metody c.d.

- Wykorzystamy metodę zaproponowaną w [10]: podstawmy

$$U(\eta) = \left(m(\eta^*)^2 y(z)\right)^{\frac{1}{m}}, \quad z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}.$$

- Równanie przyjmuje postać

$$\frac{1}{m}y'^2 + yy'' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}y + \frac{1}{m}\frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}(1-z)y'.$$

  z warunkami **początkowymi** $y(0) = 0$ $y'(0) = \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}$.
- Warunek na pochodną otrzymujemy z postaci równania.
- Znając y można bardzo łatwo otrzymać położenie frontu: $\eta^* = 1/\sqrt{my(1)}$.

Zarys metody c.d.

- Wykorzystamy metodę zaproponowaną w [10]: podstawmy

$$U(\eta) = \left(m(\eta^*)^2 y(z)\right)^{\frac{1}{m}}, \quad z = 1 - \frac{\eta}{\eta^*}.$$

- Równanie przyjmuje postać

$$\frac{1}{m}y'^2 + yy'' = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}y + \frac{1}{m}\frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}(1-z)y'.$$

  z warunkami **początkowymi** $y(0) = 0$ $y'(0) = \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)}$.
- Warunek na pochodną otrzymujemy z postaci równania.
- Znając y można bardzo łatwo otrzymać położenie frontu: $\eta^* = 1/\sqrt{my(1)}$.
- Okazuje się, że szereg Taylora dla y zbiega bardzo szybko.

Zarys metody c.d.

- Biorąc kilka pierwszych wyrazów w rozwinięciu Taylora dla $y(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$ oraz powracając do oryginalnej zmiennej otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
U_1(\eta) &= (1 - \eta/\eta_1^*)^{\frac{1}{m}} \\
U_2(\eta) &= ((1 - \eta/\eta_2^*)(1 - m a_2 \eta_2^* \eta))^{\frac{1}{m}},
\end{aligned},
$$

gdzie a_i można wyliczyć, np. $a_1 = y'(0) = \frac{\alpha}{2}\lambda_0 - \lambda_1$. Pozostałe a_i są bardziej skomplikowane.

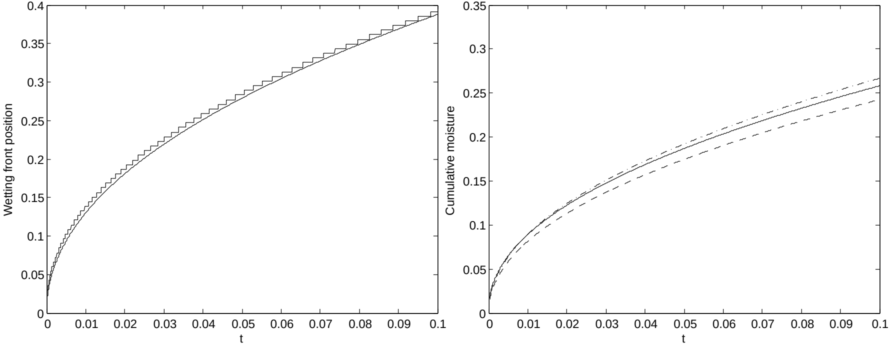
- Dodatkowo możemy policzyć skumulowany zasób wodny

$$
I_i(t) := \int_0^\infty u_i(x,t)dx = \int_0^\infty U_i\left(\frac{x}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\right)dx = t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\eta^*} U_i(\eta)d\eta.
$$

Otrzymujemy

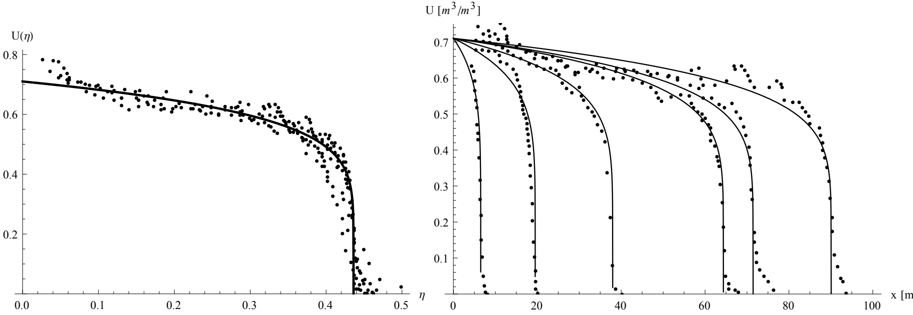
$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \frac{m}{m+1}\eta_1^* t^{\frac{\alpha}{2}}, \\
I_2(t) &= \frac{m}{m+1}\eta_2^* \, {}_2F_1\left(-\frac{1}{m}, 1; 2 + \frac{1}{m}; \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) t^{\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}
$$

Wyniki numeryczne



Rysunek: Po lewej: położenie frontu $\eta^*(t)$ (zyg-zag) oraz przybliżenie $\eta_3^*(t) = \eta_3^* t^{\alpha/2}$ (linia gładka). Po prawej: skumulowana wilgotność (linia ciągła) oraz przybliżenia I_1 (linia przerywana) i I_2 (linia przerywana z kropkami). Tutaj $\alpha = 0.95$ and $m = 2$.

Wyniki numeryczne c.d.



Rysunek: Dopasowanie U_3 z danymi eksperymentalnymi z [2]. Po lewej: profil samopodobny; po prawej: ewolucja czasowa. Tutaj $\alpha = 0.855$, $C = 0.71$ m^3/m^3, $m = 6.98$, $D_0 = 5.36$ mm/s$^{0.855}$.

Problemy odwrotne

- W zastosowaniach możliwy jest pomiar U. Czy jest możliwość zbadania w ten sposób własności materiałowych ośrodka?
- Wielkością, która zawiera w sobie potrzebne informacje jest $D(U)$
- Mamy zatem **problem odwrotny**: z wiedzy o U wyznaczyć $D(U)$.

Problemy odwrotne

- W zastosowaniach możliwy jest pomiar U. Czy jest możliwość zbadania w ten sposób własności materiałowych ośrodka?
- Wielkością, która zawiera w sobie potrzebne informacje jest $D(U)$
- Mamy zatem **problem odwrotny**: z wiedzy o U wyznaczyć $D(U)$.

Definicja

Problem matematyczny (na przykład równanie różniczkowe) jest nazywany ***dobrze postawionym*** *jeżeli spełnia poniższe warunki*

- *ma rozwiązanie,*
- *rozwiązanie jest jedyne,*
- *mała zmiana w danych wejściowych powoduje małe zmiany na wyjściu (stabilność).*

Jeśli problem nie jest dobrze postawiony to mówimy, że jest ***źle postawiony****. Problemy odwrotne często właśnie takie są.*

[11] **Ł.Płociniczak**, *Diffusivity identification in a nonlinear time-fractional diffusion equation*, Fractional Calculus and Applied Analysis 19(4) (2016), pp. 883-866.

Identyfikacja dyfuzyjności

- Istnienie i jednoznaczność (z dokładnością do stałej D_s) - **łatwe całkowanie**

$$D(U(\eta)) = \frac{1}{U'(\eta)} \left[D_s U'(0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \int_0^\eta F_\alpha U(z) dz - \frac{\alpha}{2} \eta F_\alpha U(\eta) \right].$$

- A co ze **stabilnością** oraz **kosztem** obliczeniowym?
- Koszt może zostać obniżony stosując przybliżenie (wcześniejsze wyniki)

$$\widetilde{D}(U(\eta)) = \frac{1}{U'(\eta)} \left[D_s U'(0) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} \right) \int_0^\eta U(z) dz - \frac{\alpha}{2\Gamma(2-\alpha)} \eta U(\eta) \right].$$

Jak widzimy, ten wzór nie wymaga podwójnego całkowania (dużo tańsze obliczenia)

Główne rezultaty

Definicja

Niech $\eta_0 > 0$. Wtedy ***norma supremum*** *funkcji $U : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem $\|U\|_{\infty,\eta_0} := \sup_{\eta\in[0,\eta_0]} |U(\eta)|$.*

Definicja

Funkcja $U : [0, \infty] \to [0, \infty]$ jest ***dopuszczalna*** *jeśli jest ograniczona razem ze swoją pierwszą pochodną, niemalejąca oraz znikająca w nieskończoności.*

Twierdzenie

Niech U będzie dopuszczalna. Ustalmy $\eta_0 > 0$ takie, że $E_{\eta_0} := \sup_{\eta\in[0,\eta_0]} |\eta/U'(\eta)|$ jest skończone. Mamy wtedy

$$\left\| D(U) - \widetilde{D}(U) \right\|_{\infty,\eta_0} \leq E_{\eta_0} \left(2A(\alpha) \|U\|_{\infty} + B(\alpha)\eta_0 \|U'\|_{\infty}\right),$$

gdzie $A(\alpha)$ oraz $B(\alpha)$ są jawnie znane oraz $O(1-\alpha)$ gdy $\alpha \to 1$.

Główne wyniki. Regularyzacja

- Różniczkowanie nie jest stabilną operacją dlatego musimy zregularyzować wzór na D.

Główne wyniki. Regularyzacja

- Różniczkowanie nie jest stabilną operacją dlatego musimy zregularyzować wzór na D.
- Niech U^δ będzie wilgotnością zmierzoną z błędem, to jest $\left\| U - U^\delta \right\|_\infty \leq \delta$.

Główne wyniki. Regularyzacja

- Różniczkowanie nie jest stabilną operacją dlatego musimy zregularyzować wzór na D.
- Niech U^δ będzie wilgotnością zmierzoną z błędem, to jest $\left\| U - U^\delta \right\|_\infty \leq \delta$.
- Wprowadźmy **strategię regularyzacyjną** dla U' (na przykład różnicę skończoną)
$$\left\| U' - (U^\delta)'_h \right\|_\infty \leq R(h, \delta),$$
dla której istnieje takie $h_0 = h_0(\delta)$, że $R(h_0(\delta), \delta) \to 0$ kiedy $\delta \to 0$. Ponadto, $\left(U^\delta\right)'_h$ jest **stabilnym** operatorem dla każdego $h > 0$.

Główne rezultaty. Regularyzacja

Twierdzenie

Niech D_h będzie rodziną operatorów regularyzacyjnych dla dyfuzyjności oraz ustalmy $\eta_0 > 0$. Wtedy dla $U \in \mathcal{X}$ takie, że istnieje $\epsilon > 0$ o własności $\epsilon \leq \inf_{\eta \in [0,\eta_0]} |U'(\eta)| < \infty$ mamy

$$\left\| D(U) - D_h(U^\delta) \right\|_{\infty,\eta_0} \leq \frac{1}{\epsilon} \left[D_s \left(1 + \frac{R(h,\delta) + \|U'\|_\infty}{\epsilon} \right) R(h,\delta) + \frac{\eta_0}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\delta + \frac{\delta + \|U\|_\infty}{\epsilon} R(h,\delta) \right) \right].$$

Twierdzenie

Niech spełnione będą założenia powyższego twierdzenia. Jeśli strategia regularyzacyjna jest taka, że $R(h_0(\delta),\delta) = O(\delta^\mu)$ dla $\delta \to 0$ wtedy

$$\left\| D(U) - D_h(U^\delta) \right\|_{\infty,\eta_0} = O(\delta^\mu) \quad \textit{gdy} \quad \delta \to 0.$$

Bibliografia

1. L. Pel, K. Kopinga, G. Bertram and G. Lang, *Water absorption in a fired-clay brick observed by NMR scanning*, J. Phys. D.: Appl. Phys. 28 (1995) 675–680.
2. Abd El-Ghany, El Abd and J.J. Milczarek, *Neutron radiography study of water absorption in porous building materials: anomalous diffusion analysis*, J. Phys. D.: Appl. Phys. 37 (2004) 2305–2313.
3. S.C. Taylor, W.D. Hoff, M.A. Wilson and K.M. Green, *Anomalous water transport properties of Portland and blended cement-based materials*, J. Mater. Sci. Lett. 18 (1999) 1925–27.
4. M.Kuntz and P.Lavallee, *Experimental evidence and theoretical analysis of anomalous diffusion during water infiltration in porous building materials*, J. Phys. D: Appl. Phys. 34 (2001), 2547-2554
5. E. Gerolymatou, I.Vardoulakis and R.Hilfer, *Modelling infiltration by means of a nonlinear fractional diffusion model*, J. Phys. D: Appl. Phys. 39 (2006), 4104–4110.
6. D.N. Gerasimov, V.A. Kondratieva and O.A. Sinkevich, *An anomalous non-self-similar infiltration and fractional diffusion equation*, Physica D 239 (2010) 1593–1597.
7. Y. Pachepsky, D. Timlin and W. Rawls, *Generalized Richard's equation to simulate water transport in unsaturated soils*, J. Hydrol. (2003) 2723–13
8. J.R. King, Approximate solutions to a nonlinear diffusion equation, Journal of Engineering Mathematics 22: 53-72 (1988)