O zastosowaniu wypukłych porządków stochastycznych

Teresa Rajba

(Jacek Mrowiec, Szymon Wąsowicz)

ATH, Bielsko-Biała

Zakopane, 2016

Wypukły porządek

- $F_X(x) = P(X < x)$ $(x \in \mathbb{R})$ jest **dystrybuantą** zmiennej losowej $X : \Omega \to \mathbb{R}$,
- μ_X jest **rozkładem** odpowiadającym X.

Definicja

Dla z. l. X, Y, mówimy, że z. l. X *jest zdominowana przez* Y *w sensie stochastycznego* ***wypukłego uporządkowania*** , gdy

$$\mathbb{E}f(X) \leqslant \mathbb{E}f(Y) \tag{1}$$

dla wszystkich funkcji wypukłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dla których powyższe wartości oczekiwane są skończone). Piszemy

$$X \leqslant_{cx} Y$$

$$F_X \leqslant_{cx} F_Y.$$

Lemat Ohlina

Lemat (Ohlin (1969))

Niech

- X, Y - zmienne losowe, takie że
$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y,$$
- dla pewnego t_0 zachodzi
$$F_X(t) \leqslant F_Y(t) \quad \text{dla} \quad t < t_0\,,$$
$$F_X(t) \geqslant F_Y(t) \quad \text{dla} \quad t > t_0.$$

Wtedy

$$X \leqslant_{cx} Y,$$

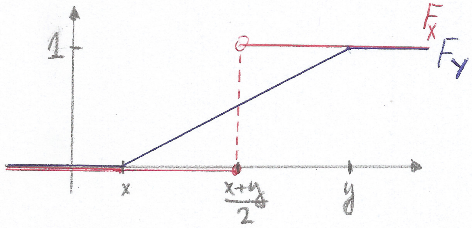
czyli

$$\mathbb{E}f(X) \leqslant \mathbb{E}f(Y)$$

dla wszystkich funkcji wypukłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hermite–Hadamard inequality

- $X \sim \delta_{\frac{x+y}{2}}$, $\quad Y$ – uniformly distributed on $[x, y]$
- $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \frac{x+y}{2}$
- The cumulative distribution functions cross exactly once.

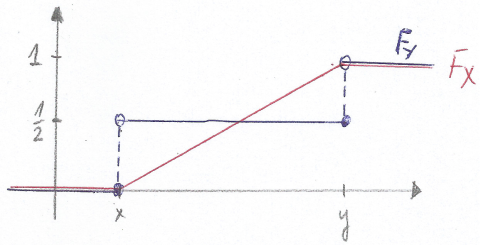


- By Ohlin's Lemma $\mathbb{E}\, f(X) \leqslant \mathbb{E}\, f(Y)$ for any continuous convex $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$.
- This means that

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{y-x} \int\limits_x^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hermite–Hadamard inequality

- X – uniformly distributed on $[x, y]$, $\quad Y \sim \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y$
- $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \frac{x+y}{2}$
- The cumulative distribution functions cross exactly once.



- By Ohlin's Lemma $\mathbb{E}\, f(X) \leqslant \mathbb{E}\, f(Y)$ for any continuous convex $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$.
- This means that

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

wielomiany Bernsteina stopnia $n = 1, 2, \ldots$

$$b_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Ioan Rașa - problem

Czy prawdziwa jest nierówność

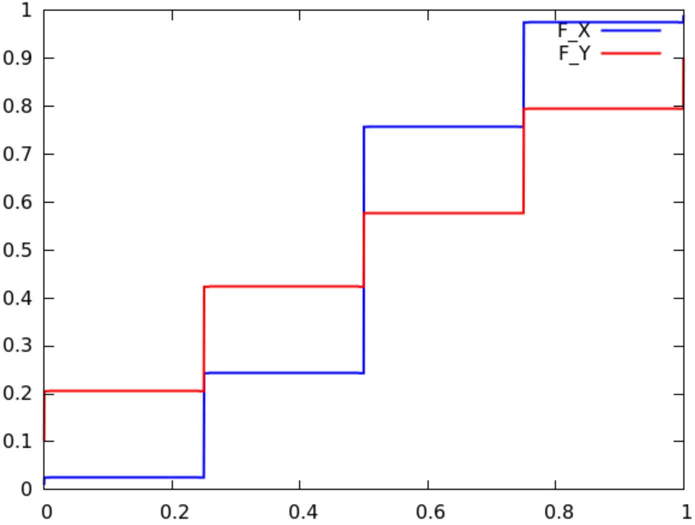
$$\sum_{i,j=0}^{n} b_{n,i}(x) b_{n,j}(y) f\left(\frac{i+j}{2n}\right) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \Big(b_{n,i}(x) b_{n,j}(x) + b_{n,i}(y) b_{n,j}(y)\Big) f\left(\frac{i+j}{2n}\right) \quad (2)$$

dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{C}([0,1])$ i $x, y \in [0,1]$.

Ioan Rașa, *Report of meeting, Conference on Ulam's Type Stability*, Rytro, Poland, June 2-6, 2014. Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math., 13:139–169, 2014.

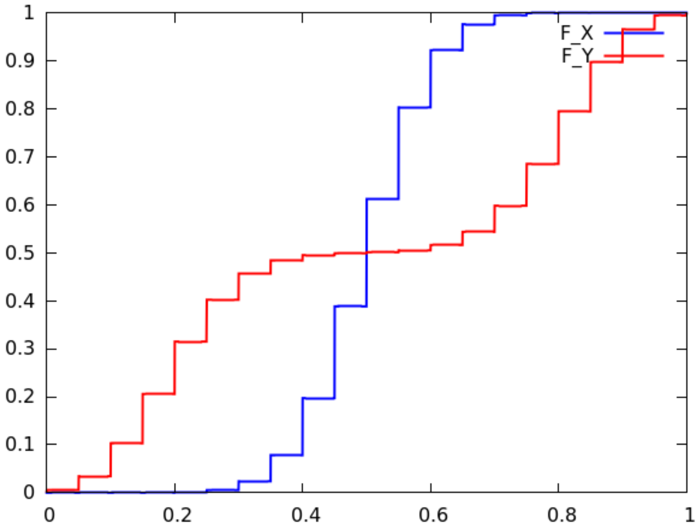
- $$X \sim \sum_{i,j=0}^{n} b_{n,i}(x) b_{n,j}(y) \delta_{\frac{i+j}{2n}}$$
  $$Y \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \Big(b_{n,i}(x) b_{n,j}(x) + b_{n,i}(y) b_{n,j}(y) \Big) \delta_{\frac{i+j}{2n}}$$
- $$\mathbb{E}\, f(X) = \sum_{i,j=0}^{n} b_{n,i}(x) b_{n,j}(y) f\left(\frac{i+j}{2n}\right)$$
  $$\mathbb{E}\, f(Y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \Big(b_{n,i}(x) b_{n,j}(x) + b_{n,i}(y) b_{n,j}(y) \Big) f\left(\frac{i+j}{2n}\right)$$
- (2) można zapisać jako:
  $$\mathbb{E}\, f(X) \leqslant \mathbb{E}\, f(Y).$$

$$n = 2, \quad x = 0.2, \quad y = 0.8, \quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0.5$$



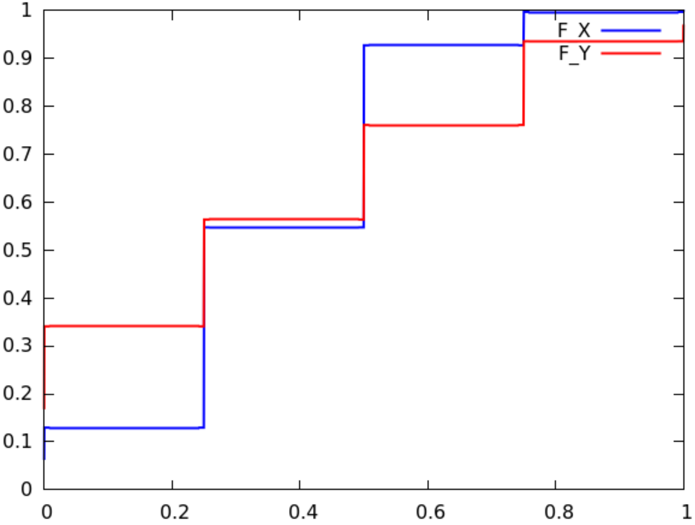
Numerical experiments

$$n = 10, \quad x = 0.2, \quad y = 0.8, \quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0.5$$



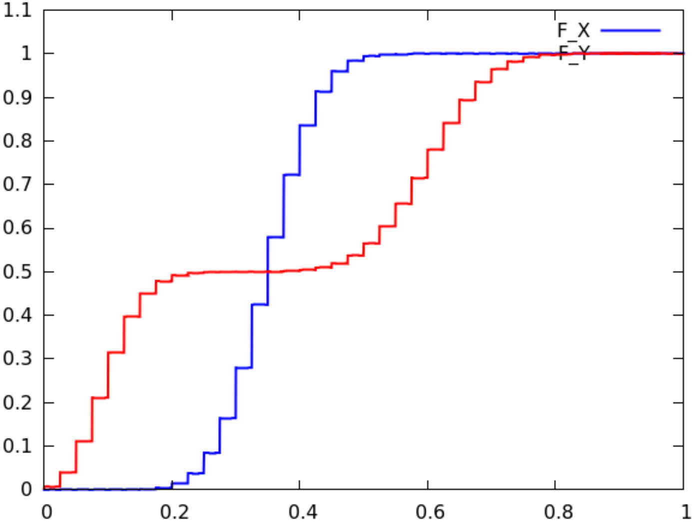
Numerical experiments

$$n = 2, \quad x = 0.1, \quad y = 0.6, \quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0.35$$



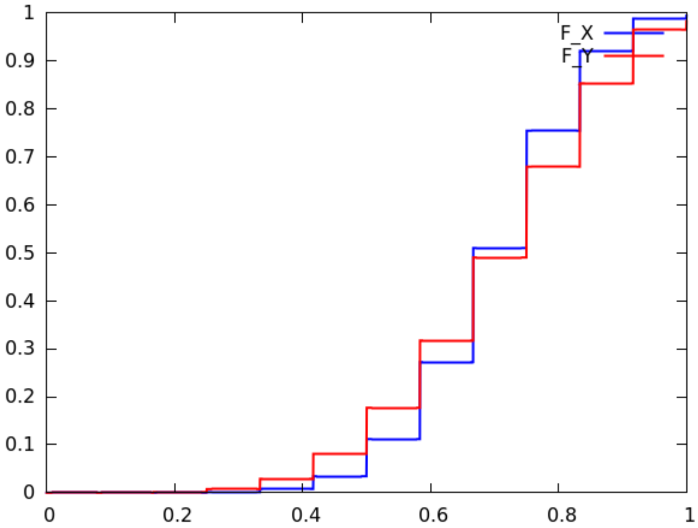
Numerical experiments

$$n = 20, \quad x = 0.1, \quad y = 0.6, \quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0.35$$



Numerical experiments

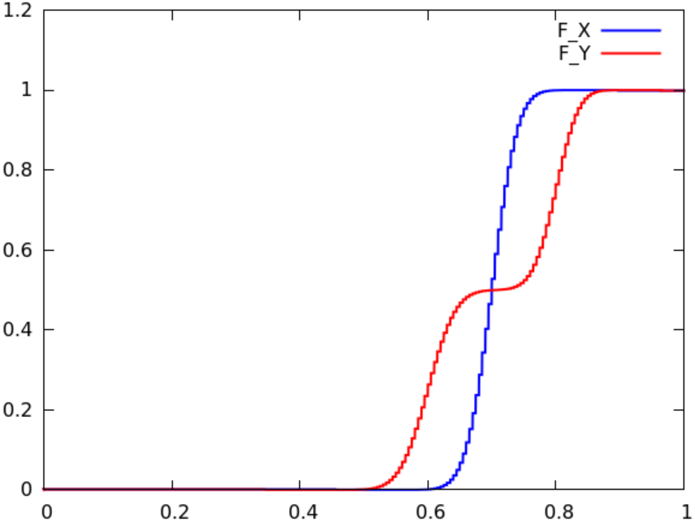
$$n = 6, \quad x = 0.6, \quad y = 0.8, \quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0.7$$



Numerical experiments

Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

$$n = 100, \quad x = 0.6, \quad y = 0.8, \quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0.7$$



Numerical experiments – conclusion

W każdym powyższym przypadku

- $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \frac{x+y}{2}$
- Dystrybuanty F_X, F_Y przecinają się dokładnie raz.

Założenia lematu Ohlina są spełnione.

Co w ogólnym przypadku?

Dwumianowa wypukła nierówność koncentracyjna (Hoeffding(1963), Klein (2003))

Notation

- $B(p)$ – rozkład Bernouliego, p - prawd. sukcesu
- $B(n,p)$ – rozkład dwumianowy, n - liczba prób, p - prawd. sukcesu

Twierdzenie3, (Hoeffding(1963), Klein (2003))

Niech

- $p_i \in (0,1)$, $b_i \sim B(p_i)$, $i = 1, \ldots, n$ - n.z.l.,
- $S_n = b_1 + \cdots + b_n$,
- $S_n^* \sim B(n, \overline{p})$, gdzie $\overline{p} = \dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n}$.

Wtedy

$$S_n \leq_{cx} S_n^*.$$

Thierry Klein, Inégalités de concentration, martingales et arbres aléatoires. *Thèse, Université de Versailles-Saint-Quentin*, 2003 (Proposition 1, p. 67).

- **Problem Rasy.** Trzeba udowodnić nierówność

$$\sum_{i,j=0}^{n} b_{n,i}(x)b_{n,j}(y)f\left(\frac{i+j}{2n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n}\Big(b_{n,i}(x)b_{n,j}(x)+b_{n,i}(y)b_{n,j}(y)\Big)f\left(\frac{i+j}{2n}\right)$$

dla wszystkich wypukłych funkcji $f \in \mathcal{C}\big([0,1]\big)$ i $x, y \in [0,1]$.

- Równoważnie

$$\sum_{k=0}^{2n}\sum_{i+j=k} b_{n,i}(x)b_{n,j}(y)f\left(\frac{k}{2n}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{i+j=k}\Big(b_{n,i}(x)b_{n,j}(x)+b_{n,i}(y)b_{n,j}(y)\Big)f\left(\frac{k}{2n}\right)$$

Rozwiązanie problemu Rasy – idea

lub równoważnie

$$\mathbb{E}\, f\left(\frac{X+Y}{2n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\, f\left(\frac{X_1+X_2}{2n}\right) + \mathbb{E}\, f\left(\frac{Y_1+Y_2}{2n}\right)\right],$$

lub

$$F_{\frac{X+Y}{2n}} \leqslant_{cx} \frac{1}{2}\left[F_{\frac{X_1+X_2}{2n}} + F_{\frac{Y_1+Y_2}{2n}}\right],$$

gdzie

- X_1, X_2 - niezależne zmienne losowe (n.z.l.), Y_1, Y_2 - n.z.l.,, X, Y - n.z.l.,.
- $0 < x < y < 1$ – $X, X_1, X_2 \sim B(n, x)$, $Y, Y_1, Y_2 \sim B(n, y)$,
- $0 = x < y < 1$ – $X, X_1, X_2 \sim \delta_0$, $Y, Y_1, Y_2 \sim B(n, y)$,
- $0 < x < y = 1$ – $X, X_1, X_2 \sim B(n, x)$, $Y, Y_1, Y_2 \sim \delta_n$,
- $x = 0, y = 1$ – $X, X_1, X_2 \sim \delta_0$, $Y, Y_1, Y_2 \sim \delta_n$.

Rozwiązanie problemu Rasy – idea

Twierdzenie 1

Niech

- $x, y \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$,
- $X, X_1, X_2 \sim B(n,x)$,
- $Y, Y_1, Y_2 \sim B(n,y)$,
- X, Y - niezależne zmienne losowe (n.z.l.),
- X_1, X_2 - n.z.l.,
- Y_1, Y_2 - n.z.l.,

Wtedy

$$F_{X+Y} \leqslant_{cx} \frac{1}{2}\left(F_{X_1+X_2} + F_{Y_1+Y_2}\right). \tag{3}$$

Twierdzenie 1 wynika z następującego twierdzenia

Twierdzenie 2

Niech

- $x, y \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$,
- $X, X_1, X_2 \sim B(n,x)$, $Y, Y_1, Y_2 \sim B(n,y)$,
- X, Y - n.z.l., X_1, X_2 - n.z.l., Y_1, Y_2 - n.z.l.,
- $S^*_{2n} \sim B\Big(2n, \dfrac{x+y}{2}\Big)$.

Wtedy

$$F_{X+Y} \leqslant_{cx} F_{S^*_{2n}} \leqslant_{cx} \frac{1}{2}\left(F_{X_1+X_2} + F_{Y_1+Y_2}\right),$$

W **dowodzie Twierdzenia 2** wykorzystujemy **dwumianową wypukłą nierówność koncentracyjną** (Hoeffding(1963), Klein (2003)) i **Lemat Ohlina** (1969)

Rozwiązanie problemu Rasy – idea

Nierówność

$$F_{X+Y} \leqslant_{cx} \frac{1}{2}\left(F_{X_1+X_2} + F_{Y_1+Y_2}\right).$$

może być fałszywa, jeśli X, Y nie mają rozkładu dwumianowego.

Przykład

Jeżeli $\mu_X = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$, $\mu_Y = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_4)$, to

$$F_{X+Y} \not\leqslant_{cx} \frac{1}{2}\left(F_{X_1+X_2} + F_{Y_1+Y_2}\right).$$

Jacek Mrowiec, Teresa Rajba, Szymon Wąsowicz, A solution to the problem of Rașa connected with Bernstein polynomials, `https://arxiv.org/abs/1604.07381`, J. Math. Anal. Appl. (accepted)

Wypukły porządek - przypadek ogólny

Twierdzenie

Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $x_1, \ldots, x_m \in (0,1)$. Załóżmy, że

(i) $X_{(1)}, \ldots, X_{(m)}$ są zmiennymi losowymi niezależnymi takimi że

$$X_{(i)} \sim B(n, x_i), \qquad i = 1, \ldots, n$$

(ii) $X_{(i),1}, \ldots, X_{(i),m}$ $(i = 1, \ldots, n)$ - n.z.l., takie że

$$X_{(i),j} \sim B(n, x_i), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Wtedy

$$F_{X_{(1)}+\cdots+X_{(m)}} \leqslant_{cx} \frac{1}{m}\Big[F_{X_{(1),1}+\cdots+X_{(1),m}} + \cdots + F_{X_{(m),1}+\cdots+X_{(m),m}}\Big].$$

Uogólnienie problemu Rasy

Twierdzenie

Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $x_1, \ldots, x_m \in (0,1)$. Wtedy

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{n} \Big(b_{n,i_1}(x_1)\cdots b_{n,i_m}(x_1) + \cdots + b_{n,i_1}(x_m)\ldots b_{n,i_m}(x_m) \\ - m b_{n,i_1}(x_1)\ldots b_{n,i_m}(x_m)\Big) f\left(\frac{i_1+\cdots+i_m}{mn}\right) \geqslant 0 \quad (4)$$

dla wszystkich wypukłych funkcji $f \in \mathcal{C}([0,1])$ i wszystkich $x_1, \ldots, x_m \in [0,1]$.

W dowodzie (4): zauważamy, że (4) jest równoważny następującym nierównościom:

Uogólnienie problemu Rasy

$$\mathbb{E}f\left(\frac{X_{(1)}+\cdots+X_{(m)}}{mn}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{m}\left[\mathbb{E}f\left(\frac{X_{(1),1}+\cdots+X_{(1),m}}{mn}\right)+\cdots+\mathbb{E}f\left(\frac{X_{(m),1}+\cdots+X_{(m),m}}{mn}\right)\right],$$

$$F_{\frac{X_{(1)}+\cdots+X_{(m)}}{mn}} \leqslant_{cx} \frac{1}{m}\left[F_{\frac{X_{(1),1}+\cdots+X_{(1),m}}{mn}}+\cdots+F_{\frac{X_{(m),1}+\cdots+X_{(m),m}}{mn}}\right],$$

- $X_{(1)},\ldots,X_{(m)}$ - n.z.l.
- $X_{(i),1},\ldots,X_{(i),m}$ $(i=1,\ldots,m)$ - n.z.l.
- $X_{(i)},X_{(i),1},\ldots,X_{(i),m}\sim B(n,x_i)\,,\quad$ gdy $x_i\in(0,1)\,,$
- $\mu_{X_{(i)}}=\mu_{X_{(i),1}}=\cdots=\mu_{X_{(i),m}}=\delta_0\,,\quad$ gdy $x_i=0\,,$
- $\mu_{X_{(i)}}=\mu_{X_{(i),1}}=\cdots=\mu_{X_{(i),m}}=\delta_n\,,\quad$ gdy $x_i=1\,.$