# AE rozwiązania układów równań liniowych z niepewnymi parametrami

Tadeusz Rzeżuchowski, Janusz Wąsowski

Zakopane, wrzesień 2016

# Układ z niepewnymi parametrami

$$Ax = b \tag{1}$$

$A = A(p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , $\qquad b = b(p) \in \mathbb{R}^m$
$p = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k$

$$A : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$$

$$A(p)x = b(p), \; p \in \mathcal{D} \tag{2}$$

# Podział parametrów

$K = \{1, \dots, k\}$

$$p = (p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_k) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^k$$

$K\forall = \{1, \dots, r\}$, $K\exists = \{r+1, \dots, k\}$

$$p_\forall = (p_1, \dots, p_r), \; p_\exists = (p_{r+1}, \dots, p_k)$$

$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^\forall \times \mathbb{R}^\exists$

$$\mathcal{D}^\forall = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^\forall} \mathcal{D}$$

# Definicja AE rozwiązania

AE rozwiązanie $\Xi_{(K\forall,K\exists)}(A(p), b(p), \mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^n$

## Definicja

$x \in \Xi_{(K\forall,K\exists)}(A(p), b(p), \mathcal{D}) \Leftrightarrow$

$\forall p_\forall \in \mathcal{D}^\forall, \exists p_\exists \in \mathbb{R}^\exists$: $(p_\forall, p_\exists) \in \mathcal{D}$,

$$A(p_\forall, p_\exists)x = b(p_\forall, p_\exists)$$

# Warunek równoważny przez zawieranie zbiorów

$$\Delta^{\forall} = \{(p_{\forall}, 0) \in \mathbb{R}^{\forall} \times \mathbb{R}^{m} : \ p_{\forall} \in \mathcal{D}^{\forall}\},$$
$$\Delta_x^{\exists} = \{(p_{\forall}, b(p_{\forall}, p_{\exists}) - A(p_{\forall}, p_{\exists})x) : (p_{\forall}, p_{\exists}) \in \mathcal{D}\}.$$

**Twierdzenie**

$$x \in \Xi_{(K\forall, K\exists)}(A(p), b(b), \mathcal{D}) \ \Leftrightarrow \ \Delta^{\forall} \subset \Delta_x^{\exists}$$

Przypadek $\mathbb{R}^{\exists} = \mathbb{R}^{k}$.

**Definicja**

$$x \in \Xi_{\mathrm{uni}}(A(p), b(p), \mathcal{D}) \;\Leftrightarrow\; \exists p \in \mathcal{D},\ A(p)x = b(p)$$

# Układy semiparametryczne

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^L \times \mathcal{D}^R, \quad A = A(p_L), \; b = b(p_R)$$

$$p_L \in \mathcal{D}^L, \quad p_R \in \mathcal{D}^R$$

$$Ax = b\,, \qquad A \in \mathcal{A},\, b \in \mathfrak{b}$$

gdzie $\mathcal{A} = A(\mathcal{D}^L)$, $\mathfrak{b} = b(\mathcal{D}^R)$.

# Układy semiparametryczne – rozwiązania „kontrolowane” i „tolerowane”

$$x \in \Xi_{\mathrm{ctr}}(\mathcal{A}, \mathfrak{b}, \mathcal{D}) \;\Leftrightarrow\; \forall b \in \mathfrak{b}, \exists A \in \mathcal{A},\; Ax = b$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{b} \subset \mathcal{A} * x$$

gdzie $\mathcal{A} * x = \{Ax : \; A \in \mathcal{A}\}$.

$$x \in \Xi_{\mathrm{tol}}(\mathcal{A}, \mathfrak{b}, \mathcal{D}) \;\Leftrightarrow\; \forall A \in \mathcal{A}, \exists b \in \mathfrak{b},\; Ax = b$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{A} * x \subset \mathfrak{b}$$

# Znaczenie praktyczne

*Te rozważania nabierają znaczenia praktycznego, kiedy udaje się wykorzystać szczególne własności odwzorowań $A(p)$ i $b(p)$ oraz zbioru $\mathcal{D}$ do sformułowania warunków, które można sprawdzić przy pomocy odpowiednich algorytmów.*

# Rozkładalność $A(p)$ i $b(p)$

$p = (p_\forall, p_\exists) \in \mathcal{D}$

$$A(p) = A(p_\forall, p_\exists) = A^\forall(p_\forall) + A^\exists(p_\exists)$$
$$b(p) = b(p_\forall, p_\exists) = b^\forall(p_\forall) + b^\exists(p_\exists)$$

$$(A^\forall(p_\forall) + A^\exists(p_\exists))x = b^\forall(p_\forall) + b^\exists(p_\exists)$$
$$\Updownarrow$$
$$A^\forall(p_\forall)x - b^\forall(p_\forall) = b^\exists(p_\exists) - A^\exists(p_\exists)x$$

# Warunek na to, żeby $x$ należał do AE rozwiązania

$x \in \mathbb{R}^n$

$$\Phi_x^{\forall} = \{(p_{\forall}, A^{\forall}(p_{\forall})x - b^{\forall}(p_{\forall})) : \; p_{\forall} \in \mathcal{D}^{\forall}\}$$
$$\Phi_x^{\exists} = \{(p_{\forall}, b^{\exists}(p_{\exists}) - A^{\exists}(p_{\exists})x) : \; (p_{\forall}, p_{\exists}) \in \mathcal{D}\}$$

$\Phi_x^{\forall}, \; \Phi_x^{\exists} \subset \mathbb{R}^{\forall} \times \mathbb{R}^m$

## Twierdzenie

*Przy założeniu rozkładalności $A(p)$ i $b(p)$*

$$x \in \Xi_{(\kappa\forall,\kappa\exists)}(A(p), b(p), \mathcal{D}) \;\Leftrightarrow\; \Phi_x^{\forall} \subset \Phi_x^{\exists}$$

$$A(p) = A^{(0)} + \sum_{\mu \in K} A^{(\mu)} p_\mu$$

$$b(p) = b^{(0)} + \sum_{\mu \in K} b^{(\mu)} p_\mu$$

$A^{(0)},\ A^{(\mu)} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b^{(0)},\ b^{(\mu)} \in \mathbb{R}^m$

$K = K\forall \cup K\exists$

# Reprezentacja zbiorów $\Phi_x^\forall$ i $\Phi_x^\exists$

$\varphi_x^\forall : \mathbb{R}^\forall \longrightarrow \mathbb{R}^\forall \times \mathbb{R}^m$

$$\varphi_x^\forall(p_\forall) = (p_\forall, A^{(0)}x - b^{(0)} + \sum_{\mu \in K\forall} (A^{(\mu)}x - b^{(\mu)})p_\mu)$$

$\varphi_x^\exists : \mathbb{R}^\forall \times \mathbb{R}^\exists \longrightarrow \mathbb{R}^\forall \times \mathbb{R}^m$

$$\varphi_x^\exists(p_\forall, p_\exists) = (p_\forall, \sum_{\mu \in K\exists} (b^{(\mu)} - A^{(\mu)}x)p_\mu)$$

## Lemat

$$\Phi_x^\forall = \varphi_x^\forall(\mathcal{D}^\forall) \; , \quad \Phi_x^\exists = \varphi_x^\exists(\mathcal{D})$$

# Przypadek wypukłego zbioru $\mathcal{D}$

Odwzorowania $\varphi_x^{\forall}$ i $\varphi_x^{\exists}$ są liniowe.

**Twierdzenie**

*Niech zależność od niepewnych parametrów będzie liniowa. Jeśli zbiór $\mathcal{D}$ jest wypukły, domknięty i ograniczony, to*

$$x \in \Xi_{(K\forall,K\exists)}(A(p), b(p), \mathcal{D}) \Leftrightarrow \varphi_x^{\forall}(\mathrm{Extr}(\mathcal{D}^{\forall})) \subset \Phi_x^{\exists}.$$

$\mathrm{Extr}(\mathcal{D}^{\forall})$ oznacza zbiór punktów ekstremalnych zbioru $\mathcal{D}^{\forall}$.

# Przykład

$$4x_1 + p_1 x_2 = p_3$$
$$p_2 x_1 + 4x_2 = 4$$

$\mathcal{D}$: $1 \leqslant p_1 \leqslant 2\,,\ 0 \leqslant p_2\,,\ p_1 + p_2 \leqslant 3\,,\ 5 \leqslant p_3 \leqslant 7\,;$
$K = \{1, 2, 3\}$, $K\forall = \{1\}$, $K\exists = \{2, 3\}$.

$\mathcal{D}^{\forall} = [1, 2]$

# Rozkład i przekształcenie układu

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot p_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p_3 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot p_2$$

$$\varphi^{\forall}_{(x_1,x_2)}(\{1,2\}) = \{[1, 4x_1, 5x_2 - 4]^T, [2, 4x_1, 6x_2 - 4]^T\},$$

$$\Phi^{\exists}_{(x_1,x_2)} = \varphi^{\exists}_{(x_1,x_2)}(\mathcal{D}) = \{[p_1, p_3, -p_2x_1]^T : \ p_1 \in [1,2], \ p_2 \in [0, 3 - p_1], \ p_3 \in [5,7]\}$$

# Warunek należenia $x = (x_1, x_2)$ do AE rozwiązania

Wszystkie elementy AE rozwiązania spełniają warunek $x_1 \geqslant 0$ i określone są układem nierówności

$$
\begin{aligned}
5 \leqslant 4x_1 + x_2 \leqslant 7\,, \\
5 \leqslant 4x_1 + 2x_2 \leqslant 7\,, \\
-x_1 \leqslant 4x_2 - 4 \leqslant 0\,.
\end{aligned}
$$

Rozwiązaniem jest czworokąt o wierzchołkach

$$A(1,1),\ B(16/15, 11/15),\ C(8/5, 3/5),\ D(5/4, 1)$$

# Rozkładalność $A(p)$, $b(p)$ oraz dziedziny $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\forall} \times \mathcal{D}^{\exists}$$

$$A(p) = A^{(0)} + A^{\forall}(p_{\forall}) + A^{\exists}(p_{\exists})$$

$$b(p) = b^{(0)} + b^{\forall}(p_{\forall}) + b^{\exists}(p_{\exists})$$

Równanie

$$(A^{(0)} + A^{\forall}(p_{\forall}) + A^{\exists}(p_{\exists}))x = b^{(0)} + b^{\forall}(p_{\forall}) + b^{\exists}(p_{\exists})$$

przyjmuje postać

$$A^{(0)}x - b^{(0)} + A^{\forall}(p_{\forall})x - b^{\forall}(p_{\forall}) = b^{\exists}(p_{\exists}) - A^{\exists}(p_{\exists})x$$

# Warunek równoważny należeniu $x$ do AE rozwiązania

$$\mathcal{U}_x^{\forall} = \{A^{\forall}(p_{\forall})x - b^{(\forall)}(p_{\forall}) : \; p_{\forall} \in \mathcal{D}^{\forall}\}$$
$$\mathcal{U}_x^{\exists} = \{b^{\exists}(p_{\exists}) - A^{\exists}(p_{\exists})x : \; p_{\exists} \in \mathcal{D}^{\exists}\}$$

**Twierdzenie**

$$x \in \Xi_{(\kappa\forall,\kappa\exists)} \;\Leftrightarrow\; A^{(0)}x - b^{(0)} + \mathcal{U}_x^{\forall} \subset \mathcal{U}_x^{\exists}$$

# Liniowa zależność od parametrów i rozkładalna dziedzina

$$\mathcal{D} = \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k) \in \mathbb{R}^k, \quad K = \{1, \ldots, k\} = K\forall \cup K\exists$$

$$A(p) = A^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{k} A^{(\mu)} p_\mu \,, \quad b(p) = b^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{k} b^{(\mu)} p_\mu$$

$$\mathcal{U}_x^{\forall} = \sum_{\mu \in K\forall} (A^{(\mu)}x - b^{(\mu)}) * \mathbf{p}_\mu$$

$$\mathcal{U}_x^{\exists} = \sum_{\mu \in K\exists} (b^{(\mu)} - A^{(\mu)}x) * \mathbf{p}_\mu$$

# Warunek należenia $x$ do AE rozwiązania - zawieranie zonotopów

## Twierdzenie

$x \in \Xi_{(K\forall, D\exists)}(A(p), b(p), \mathcal{D}) \Leftrightarrow$

$$A^{(0)}x - b^{(0)} + \sum_{\mu \in K\forall} (A^{(\mu)}x - b^{(\mu)}) * \mathbf{p}_\mu \subset$$
$$\subset \sum_{\mu \in K\exists} (b^{(\mu)} - A^{(\mu)}x) * \mathbf{p}_\mu$$

# Przykład - układy semiparametryczne z macierzami symetrycznymi

$$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}, \quad \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{sym}} = \{A \in \mathbf{A} : \; A^T = A\}$$

$$\mathcal{A}_{\text{sym}} = \sum_{i=1}^{n} T^{(ii)} * \mathbf{A}_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (T^{(ij)} + T^{(ji)}) * \mathbf{A}_{ij}$$

gdzie

$$T_{ts}^{(ij)} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad (t,s) = (i,j) \\ 0, & \text{jeśli} \quad (t,s) \neq (i,j) \end{cases}$$

Rolę parametrów pełnią $A_{ij} \in \mathbf{A}_{ij}$ .

# Przykład - układy semiparametryczne z macierzami symetrycznymi

$$\mathcal{A}_{\mathrm{sym}} * x = \sum_{i=1}^{n} (x_i e^{(i)}) * \mathbf{A}_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_j e^{(i)} + x_i e^{(j)}) * \mathbf{A}_{ij}$$

gdzie

$$e_t^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{if } \quad t = i \\ 0, & \text{if } \quad t \neq i \end{cases}$$

# Przykład - układy semiparametryczne z macierzami antysymetrycznymi

$$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}, \quad \mathbf{A}_{ij} = -\mathbf{A}_{ji}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{skew}} = \{A \in \mathbf{A} : A^T = -A\}$$

$$\mathcal{A}_{\text{skew}} * x = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_j e^{(i)} - x_i e^{(j)}) * \mathbf{A}_{ij}$$

# Opis AE rozwiązań przy pomocy nierówności

Jeśli zbiór $\mathcal{U}_x^{\exists}$ jest wypukły i domknięty, to zawieranie

$$A^{(0)}x - b^{(0)} + \mathcal{U}_x^{\forall} \subset \mathcal{U}_x^{\exists}$$

jest równoważne warunkowi

$$\forall u \in Q: \;\; h(u, A^{(0)}x - b^{(0)} + \mathcal{U}_x^{\forall}) \leqslant h(u, \mathcal{U}_x^{\exists})$$

gdzie $h$ to funkcja podpierająca,

$Q \subset \mathbb{R}^m$ taki zbiór, że $\mathcal{U}_x^{\exists} = \bigcap\{y : \langle u, y\rangle \leqslant h(u, \mathcal{U}_x^{\exists})\}$.

# Rola i znaczenie zbioru $Q$

Z praktycznych względów zbiór $Q$ powinien być możliwie mały.

Jest on skończony wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\mathcal{U}_x^{\exists}$ jest wielościanem.

Ważne jest efektywne wyznaczanie zbioru $Q$ w konkretnych sytuacjach.

Opracowane na podstawie:

*Characterization of AE Solution Sets of Parametric Linear Systems Based on the Techniques of Convex Sets;*

T. Rzeżuchowski, J. Wąsowski