Prędkość światła

Maciej Sablik

Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski, Katowice

45. Konferencja Zastosowań Matematyki
Zakopane - Kościelisko 6–13 września 2016 r.

Rozważmy dwa inercyjne układy odniesienia U i U'. Niech v oznacza prędkość układu U' względem układu U. Wówczas

$$t_U = a(v)t_{U'} + b(v)x_{U'};$$

$$x_U = c(v)t_{U'} + d(v)x_{U'}.$$

Innymi słowu otrzymujemy

$$Z_U = M(v)Z_{U'}^T,$$

gdzie $M : \Delta \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ jest funkcją macierzową, określoną na przedziale Δ, $Z_U = (t_U, x_U)$ a $Z_{U'} = (t_{U'}, x_{U'})$.

W 1985 r. w bibliotece Delty ukazała się książka pt. *Szczególna teoria względności* autorstwa prof. Andrzeja Szymachy [8]. Za Autorem bedziemy mówić o *dodawaniu prędkości.* Przypuśćmy, że u i v są prędkościami z przedziału Δ. Wówczas *sumą* obu prędkości nazwiemy wynik działania $\oplus$, o którym zakładamy, że jest przemienne, ale niekoniecznie wewnętrzne, tzn. nie wymagamy *a priori*, że

$$u \oplus v \in \Delta.$$

Rozważmy następujące równanie warunkowe

$$u \oplus v \in \Delta \Longrightarrow M(u)M(v) = M(u \oplus v). \tag{1}$$

Równanie (1) implikuje, że

$$a(u)a(v) + b(u)c(v) = a(u \oplus v) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} a(u)b(v) + b(u)d(v) &= b(u \oplus v) \\ c(u)a(v) + d(u)c(v) &= c(u \oplus v) \qquad (3) \\ c(u)b(v) + d(u)d(v) &= d(u \oplus v) \end{aligned}$$

jeśli $u \oplus v \in \Delta$.

Przemienność $\oplus$ wraz z (2) dają

$$b(u)c(v) = c(u)b(v)$$

dla wszystkich takich $u, v \in \Delta$, że $u \oplus v \in \Delta$. Zatem $c = 0$ lub

$$b(u) = \beta c(u)$$

dla pewnej stałej $\beta \in \mathbb{R}$ i wszelkich $u \in \Delta$.

Analogicznie, przemienność $\oplus$ oraz (3) dają

$$a(u)c(v) + c(u)d(v) = a(v)c(u) + c(v)d(u)$$

czyli

$$(a(u) - d(u))\, c(v) = (a(v) - d(v))\, c(u),$$

dla wszystkich takich $u, v \in \Delta$, że $u \oplus v \in \Delta$. Zatem znowu mamy alternatywę: $c = 0$ lub istnieje taka liczba $\alpha \in \mathbb{R}$, że

$$d(u) = a(u) + \alpha c(u).$$

dla wszystkich $u \in \Delta$.

Przypadek $c = 0$. Mamy

$$\begin{cases} a(u)a(v) = a(u \oplus v) \\ b(u)a(v) + d(u)b(v) = b(u \oplus v) \\ d(u)d(v) = d(u \oplus v), \end{cases}$$

i jeśli $b \neq 0$, możemy wyliczyć d przy pomocy a i b. Otrzymamy wówczas również $c = 0b$.
Wobec tego wystarczy zająć się dwoma następującymi sytuacjami:

1^o $b = c = 0$

2^o $c \neq 0$.

Przypadek 1^o pociąga

$$\begin{cases} a(u)a(v) = a(u \oplus v) \\ d(u)d(v) = d(u \oplus v), \end{cases}$$

i nie będziemy się nim w niniejszym odczycie zajmować.
Przypadek 2^o prowadzi do następującego układu:

$$\begin{cases} a(u)a(v) + \beta c(u)c(v) = a(u \oplus v) \\ a(u)c(v) + c(u)a(v) + \alpha c(u)c(v) = c(u \oplus v), \end{cases} \tag{4}$$

jeśli $u \oplus v \in \Delta$.

Niekiedy wyliczenie $u \oplus v$ jest łatwe. Na przykład przypuśćmy, że $a(u) \neq 0$, $u \in \Delta$, i $c(u) = ua(u)$, $u \in \Delta$. Wtedy

$$\begin{cases} a(u)a(v)\,(1 + \beta uv) = a(u \oplus v) \\ a(u)a(v)\,(u + v + \alpha uv) = (u \oplus v)\, a(u \oplus v), \end{cases}$$

skąd (ponieważ $a(u) \neq 0$, $u \in \Delta$)

$$u \oplus v = \frac{u + v + \alpha uv}{1 + \beta uv}$$

jeśli tylko $u \oplus v \in \Delta$. Oczywiście widać, że $1 + \beta uv \neq 0$ dla każdych takich $u, v \in \Delta$, że $u \oplus v \in \Delta$ (w przeciwnym przypadku mielibyśmy $a(u \oplus v) = 0$, wbrew naszemu założeniu).

Z drugiej strony, przypuśćmy, że c jest różnowartościowe, i ponownie rozważmy układ (4). Połóżmy $f := a \circ c^{-1} : c(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$. Oznaczmy $x := c(u)$, $y := c(v)$. Otrzymujemy z układu (4) następujące równanie

$$f\left[f(x)y + f(y)x + \alpha xy\right] = f(x)f(y) + \beta xy, \quad x, y \in c(\Delta). \tag{5}$$

Podstawiając $\varphi(x) := f(x) + \frac{\alpha x}{2}$ przekształcamy (5) w

$$\varphi\left[x\varphi(y) + y\varphi(x)\right] = \varphi(x)\varphi(y) + \left(\frac{\alpha^2}{4} + \beta\right) xy, \quad x, y \in c(\Delta).$$

Wprowadzając oznaczenie $K := \frac{\alpha^2}{4} + \beta$, otrzymamy stąd

$$\varphi\left[x\varphi(y) + y\varphi(x)\right] = \varphi(x)\varphi(y) + Kxy, \;\; x, y \in c(\Delta). \tag{6}$$

Ostatecznie, dla $x := c(u)$, $y := c(v)$, dostajemy z układu (4) równanie

$$u \oplus v = c^{-1}(x) \oplus c^{-1}(y) = c^{-1}\left(A_\varphi(x, y)\right) = c^{-1}\left(A_\varphi(c(u), c(v))\right). \tag{7}$$

Równanie funkcyjne (6) było rozważane przez wielu autorów. Wspomnijmy tutaj np. P. Volkmanna i H. Weigela [9], N. Brillouet i J. Dhombresa [3]. Równanie to, do pewnego stopnia, jest związane z równaniem łączności (zob. J. Aczél [1], również R. Craigen, Zs. Páles [4]). Ponadto równanie to ma wiele wspólnego ze znanym równaniem funkcyjnym Abela, które Hilbert wymienił w swoim Piątym Problemie. W pracy ([6]) zajmowaliśmy się dokładnie taką samą sytuacją. Omawialiśmy tam tzw. warunkową łączność, która prowadziła do równania (6).

W pracy [6] dowiedliśmy twierdzenia o postaci ogólnego ciągłego rozwiązania równania (6). Nie przedstawimy tu całego twierdzenia, składa się ono z 13–14 możliwych przypadków, a każdemu z nich towarzyszy tzw. przypadek sprzężony. Liczbę przypadków można ograniczyć do 5, jeśli założymy, że $\varphi(0) = 1$. Zauważmy, że jest to naturalne założenie w rozważanej przez nas sytuacji: ponieważ oczywiście $M(0) = I$, to $a(0) = 1$, $c(0) = 0$, a stąd $f(0) = \varphi(0) = 1$. Określmy funkcję $A_\varphi : \Delta \times \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $A_\varphi(x, y) := x\varphi(y) + y\varphi(x)$, $x, y \in \Delta$.

Twierdzenie 1 [M. S., Proposition 1 w [6]]

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zawierającym 0 i niech $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że $\varphi(0) = 1$. Wówczas A_φ jest *lokalnie łączna* wtedy i tylko wtedy, gdy φ ma jedną z następujących postaci (podajemy tu dwie spośród nich, pomijając trzy pozostałe):

(S_1) $\varphi(x) = 1 + Ax$ dla $x \in I$, gdzie I jest dowolnym przedziałem, a $A \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą,

(S_5')

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{r_0^{-1}(x)}, & x \in I \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

gdzie $A \neq 0$ jest pewną stałą, a $r_0 : R_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją daną wzorem $r_0(u) = \left(\frac{1}{A}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$ dla $u \in R_0 = (-1, 1)$. Przedział I jest zawarty w $r_0((-1, 1))$.

W przypadku (S_1) mamy $A_\varphi(x,y) = x + y + 2Axy$, $x, y \in \mathbb{R}_+$. Biorąc $a(u) \equiv 1$, i $c(u) = u$, $u \in \mathbb{R}_+$, otrzymamy $c^{-1}(x) = x, x \in \mathbb{R}_+$. Zatem, biorąc $x := c(u)$, $y := c(v)$, otrzymamy (por. (7))

$$u \oplus v = A_\varphi(u,v) = u + v + 2Auv,$$

czyli, dla $A = 0$, po prostu dodawanie prędkości na sposób stosowany przez Galileusza.

W przypadku (S_5') mamy

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{r_0^{-1}(x)}, & x \in I \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases} ,$$

lub, ponieważ $r_0^{-1}(x) = \frac{Ax}{\sqrt{1+(Ax)^2}}$

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + (Ax)^2}.$$

Oznaczmy $C := A^2$. Wówczas

$$A_\varphi(x, y) = x\sqrt{1 + Cy^2} + y\sqrt{1 + Cx^2}, \; x, y \in I.$$

Połóżmy $a(u) := \frac{1}{\sqrt{1-Cu^2}}$, $c(u) := \frac{u}{\sqrt{1-Cu^2}}$. Stosując znowu(7) otrzymujemy

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+Cuv},$$

czyli sumowanie prędkości w sensie Einsteina.

Inne podejście

W. Benz, *A characterization of relativistic addition.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **70** (2000), 251-258.

Niech X będzie przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, przy czym $\delta(x, y) =: xy$. W szczególności $x^2 > 0$, $0 \neq x \in X$. Zakładamy, że $\dim X \geq 1$.
Połóżmy

$$V := \{x \in X : x^2 < 1\}.$$

oraz określmy działanie $* : V \times V \longrightarrow X$ wzorem

$$p * q := \frac{p + q}{1 + pq} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 - p^2}} \frac{(pq)p - p^2 q}{1 + pq} \tag{8}$$

dla $p, q \in V$.

Ponieważ

$$-pq \leq | pq | \leq \sqrt{p^2}\sqrt{q^2} < 1,$$

mamy $1 + pq > 0$ dla $p,\ q \in V$. Ponadto

$$p * q \in V,$$

gdyż można sprawdzić, że

$$0 \leq (p * q)^2 = 1 - \frac{\left(1 - p^2\right)\left(1 - q^2\right)}{(1 + pq)^2} < 1.$$

Jeśli przyjmiemy, że prędkość światła wynosi 1, to wzór (8) definiuje *prawo relatywistycznego dodawania prędkości* w przypadku gdy $\dim X = 3$.

Zauważmy, że

$$p * q = \frac{p+q}{1+pq} \tag{9}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy p i q są liniowo zależne. W szczególności (9) przedstawia dodawanie relatywistyczne, gdy $\dim X = 1$, przy czym wówczas zwykłe mnożenie xy pełni rolę iloczynu skalarnego, $x, y \in \mathbb{R}$.

Dal punktów p, $q \in V$ określamy *oddzielenie* $S(p, q)$ następująco:

$$S(p, q) := \frac{1 - pq}{\sqrt{1 - p^2}\sqrt{1 - q^2}}. \tag{10}$$

Problem 1.

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania $f : V \times V \longrightarrow V$ równania

$$S(p,q) = S\left(f(x,p), f(x,q)\right), \tag{11}$$

które zachodzi dla wszelkich $x,\ p,\ q \in V$. Zauważmy, że w szczególności funkcja dana wzorem

$$f(p,q) = p * q \tag{12}$$

dla $p,\ q \in V$ jest rozwiązaniem. Więcej, jeśli $\psi : V \longrightarrow V$ jest dowolną funkcją, to również funkcja

$$f(p,q) = \psi(p) * q$$

dla $p,\ q \in V$ jest rozwiązaniem (11).

Problem 2.

Podać założenia, możliwie słabe, pod którymi f dane wzorem (12) będzie jedynym rozwiązaniem (11).

Najpierw podamy rozwiązania obu problemów w przypadku, gdy $\dim X = 1$ (wówczas $V = (-1, 1)$).

Twierdzenie 2 [W.Benz, Proposition 1 w [2]]

Wszystkie rozwiązania równania (11) są dane wzorami

$$f(p,q) = \frac{\psi(p)+q}{1+\psi(p)q}$$

oraz

$$f(p,q) = -\frac{\psi(p)+q}{1+\psi(p)q},$$

z dowolną funkcją $\psi : V \longrightarrow V$.

Twierdzenie 3 [W.Benz, Proposition 2 w [2]]

Rozwiązanie $f : V \times V \longrightarrow V$ równania (11) jest postaci (9) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki

(i) $\bigwedge_{p \in V} f(p, 0) = p$,

(ii) $\bigvee_{p \in V} f(p, p) \neq 0$.

Teraz załóżmy, że dim$X \geq 2$. Odwzorowanie Weierstrassa $\mu : V \longrightarrow X$, dane wzorem

$$\mu(x) := \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

jest bijekcją. Mamy następujące

Twierdzenie 4 [W.Benz, Theorem 2 w [2]]

Rozwiązanie $f : V \times V \longrightarrow V$ równania (11) jest postaci (12) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki

(i) $\bigwedge_{p \in V} \parallel f(p, 0) \parallel = \parallel p \parallel$,

(ii) $\bigwedge_{p,q \in V} \mu\left(f(p, q)\right) - \mu(q) \in (0, \infty)p$.

- J. Aczél, *Sur les opérations définies pour nombres réels.* Bull. Soc. Math. France **76** (1949), 59-64.
- W. Benz, *A characterization of relativistic addition.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **70** (2000), 251-258.
- N. Brillouet, J. Dhombres, Equations fonctionnelles et recherche de sous-groupes. Aeqationes Math. **31** (1986), 253-293.
- R. Craigen, Zs. Páles, *The associativity equation revisited.* Aequationes Math. **37** (1989), 306-312.
- M. Sablik, *The continuous solution of a functional equation of Abel.* Aequationes Math. **39** (1990), 19-39.
- M. Sablik, *On some local topological semigroups.* Aequationes Math. **44** (1992), 194-219.
- M. Sablik, *A functional equation of Abel revisited.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **64** (1994),203-210.

- A. Szymacha, *Szczególna teoria względności.* Alfa, Warszawa 1985.
- P. Volkmann, H. Weigel, *Über ein Problem von Fenyő.* Aequationes Math. **27** (1984), 135-149.