Analiza portfelowa w czasie ciągłym dla ogólnych cen zakupu i sprzedaży ze stałymi kosztami za transakcje

Łukasz Stettner

Instytut Matematyczny PAN

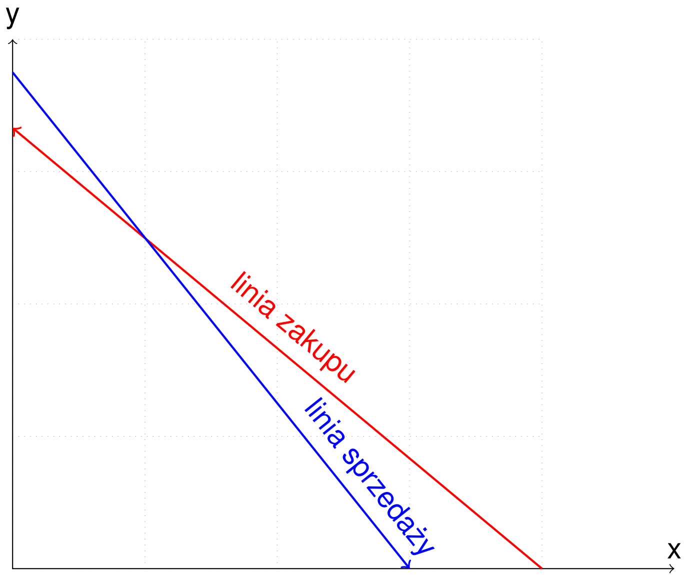
Problem bez stałych kosztów za transakcje

$(\Omega, F, (F_t), P)$ przestrzeń probabilistyczna
U ciągła nierosnąca funkcja (użyteczności) na $R_+ := [0, \infty)$
$(\underline{s}_t), (\overline{s}_t)$ para (F_t) adaptowalnych càdlàg procesów takich, że $\underline{s}_t < \overline{s}_t$, dla $t \in [0, T]$.
Para $(x, y) \in R_+^2$; x - rachunek bankowy, y - ilość akcji, przyjmujemy, że **obie wartości są zawsze nieujemne**
Dopuszczalne ruchy: zakup l akcji, sprzedaż m akcji

$$A(x, y, \underline{s}, \overline{s}) = \left\{(l, m) \in R_+^2 : x + m\underline{s} - l\overline{s} \geq 0, y - m + l \geq 0\right\} \tag{1}$$

and $\mathcal{A}_t(x, y, \underline{s}_t, \overline{s}_t)$ oznaczają F_t mierzalne zmienne (l, m) o wartościach w $A(x, y, \underline{s}_t, \overline{s}_t)$.
Cel zmaksymalizować $E\left[U(x_T + y_T\underline{s}_T)\right]$ (prace wspólne z dr T. Rogala):

Zakup i sprzedaż



Układ równań Bellmana - co najwyżej r transakcji

$$V_0(x,y,\underline{s},\overline{s}) := U(x+y^+\underline{s})$$

$$\bar{V}_1(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) :=$$

$$esssup_{(l,m)\in\mathcal{A}_t(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t)} E\left[V_0(x+m\underline{s}_t - l\overline{s}_t, y-m+l, \underline{s}_T, \overline{s}_T)|F_t\right]$$

$$V_1(x,y,t) := esssup_{t\le\tau\le T} E\left[\bar{V}_1(x,y,\underline{s}_\tau,\overline{s}_\tau,\tau)|F_t\right]$$

$$\bar{V}_2(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) :=$$

$$esssup_{(l,m)\in\mathcal{A}_t(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t)} V_1(x+m\underline{s}_t - l\overline{s}_t, y-m+l, t)$$

$$V_2(x,y,t) := esssup_{t\le\tau\le T} E\left[\bar{V}_2(x,y,\underline{s}_\tau,\overline{s}_\tau,\tau)|F_t\right] \dots$$

$$\bar{V}_r(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) :=$$

$$esssup_{(l,m)\in\mathcal{A}_t(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t)} V_{r-1}(x+m\underline{s}_t - l\overline{s}_t, y-m+l, t)$$

$$V_r(x,y,t) := esssup_{t\le\tau\le T} E\left[\bar{V}_r(x,y,\underline{s}_\tau,\overline{s}_\tau,\tau)|F_t\right] \tag{2}$$

Układ równań Bellmana wynik

Założenie (A1): *Dla każdego* $(x, y) \in R^2_+$, $n = 1, \ldots, r$ *i* $t \in [0, T]$ *mamy*

$$E\left[\sup_{t \in [0,T] \cap Q} \bar{V}_n(x, y, \underline{s}_t, \overline{s}_t, t)\right] < \infty \qquad (3)$$

gdzie Q liczby wymierne.

Twierdzenie 1. Przy (A1) istnieje $N \subset \Omega$ taki, że $P(N) = 0$ i dla $\omega \in \Omega \setminus N$ istnieją wersje funkcji losowych $\bar{V}_n(x, y, \underline{s}_t, \overline{s}_t, t)$ i $V_n(x, y, t)$, dla $n \in \{1, \ldots, r\}$ które są ciągłe ze względu na $(x, y) \in R^2_+$, jednostajnie względem $t \in [0, T]$ dla (x, y) ze zbiorów zwartych i dla każdego $(x, y) \in R^2_+$ są càdlàg względem $t \in [0, T]$ a ponadto spełniają układ równań Bellmana (2), P prawie wszędzie.

$$\sup_{(\tau_i,(l^i,m^i))} J_{x,y}((\tau_i,(l^i,m^i))) = V_r(x,y,0) \tag{4}$$

Dla danego $(x,y) \in R_+^2$ i $\varepsilon > 0$ istnieje ε optymalna strategia inwestycyjna $(\tau_i,(l^i,m^i))$ dana przez

$$\begin{aligned}
&\tau_1 := \inf\left\{t \geq 0 : V_r(x,y,t) \leq \bar{V}_r(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) + \frac{\varepsilon}{r}\right\},\\
&(l^1,m^1) := (\hat{l}^1,\hat{m}^1) \in \mathcal{A}_{\tau_1}(x,y,\underline{s}_{\tau_1},\overline{s}_{\tau_1}),\\
&\bar{V}_r(x,y,\underline{s}_{\tau_1},\overline{s}_{\tau_1},\tau_1) = V_{r-1}(x+\hat{m}^1\underline{s}_{\tau_1} - \hat{l}^1\overline{s}_{\tau_1}, y - \hat{m}^1 + \hat{l}^1, \tau_1),\\
&\vdots\\
&\tau_{i+1} := \inf\left\{t \geq \tau_i : V_{r-i}(x_{\tau_i},y_{\tau_i},t) \leq \bar{V}_{r-i}(x_{\tau_i},y_{\tau_i},\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) + \frac{\varepsilon}{r}\right\},\\
&(l^{i+1},m^{i+1}) := (\hat{l}^{i+1},\hat{m}^{i+1}) \in \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}(x_{\tau_i},y_{\tau_i},\underline{s}_{\tau_{i+1}},\overline{s}_{\tau_{i+1}}),
\end{aligned} \tag{5}$$

Optymalne sterowanie kontynuacja

$$\bar{V}_{r-i}(x_{\tau_i}, y_{\tau_i}, \underline{s}_{\tau_{i+1}}, \overline{s}_{\tau_{i+1}}, \tau_{i+1}) =$$
$$V_{r-i-1}(x_{\tau_i} + \hat{m}^{i+1}\underline{s}_{\tau_{i+1}} - \hat{l}^{i+1}\overline{s}_{\tau_{i+1}}, y_{\tau_i} - \hat{m}^{i+1} + \hat{l}^{i+1}, \tau_{i+1})$$
$$\vdots$$
$$V_0(x_{\tau_r}, y_{\tau_r}, \underline{s}_T, \overline{s}_T, T) = U(x + y_{\tau_r}\underline{s}_T), \tag{6}$$

gdzie dla $i = 0, 1, \ldots, r-1$, $x_{\tau_{i+1}} = x_{\tau_i} + \hat{m}^{i+1}\underline{s}_{\tau_{i+1}} - \hat{l}^{i+1}\overline{s}_{\tau_{i+1}}$ i $y_{\tau_{i+1}} = y_{\tau_i} - \hat{m}^{i+1} + \hat{l}^{i+1}$.

Przykładowe wyniki pomocnicze

Stwierdzenie 1. Załóżmy, że istnieje $N \subset \Omega$, $P(N) = 0$ taki, że dla $\omega \in \Omega \setminus N$ i $(x, y) \in R_+^2$, $\bar{V}(x, y, t)(\omega)$ jest procesem càdlàg adaptowalnym do (F_t) takim, że $(x, y) \mapsto \bar{V}(x, y, t)$ jest ciągłe jednostajnie względem t, dla (x, y) ze zwartych podzbiorów R_+^2 oraz $E[\sup_{t\in[0,T]} |\bar{V}(x, y, t)|] < \infty$. Wtedy dla $\omega \in \Omega \setminus \bar{N}$, $P(\bar{N}) = 0$ istnieje proces càdlàg $(V(x, y, t))(\omega)$, adaptowalny do (F_t) taki, że $(x, y) \mapsto V(x, y, t)$ jest ciągłe jednostajnie względem t dla (x, y) ze zwartych podzbiorów R_+^2 i

$$V(x, y, t) = esssup_{t\leq\tau\leq T} E\left[\bar{V}(x, y, \tau)|F_t\right] \tag{7}$$

P p.p..

Przykładowe wyniki pomocnicze - topologia Hausdorffa

h metryka Hausdorffa zdefiniowana na $H(R^4_+)$ (zwarte podzbiory R^4_+) w następujący sposób

$$h(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

z $d(A, B) := \sup\{dist(a, B) : a \in A\}$ i $dist(x, A) := \inf\{dist(x, a) : a \in A\}$. Wiadomo, ze $(H(R^4_+), h)$ jest zupełną przestrzenią metryczną

Lemat 1. Niech $(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)$ będzie ciągiem wektorów z R^4_+ takim, że $\underline{s}_n \leq \overline{s}_n$, które zbiegają do $(x, y, \underline{s}, \overline{s})$, gdzie $\underline{s} < \overline{s}$. Wtedy

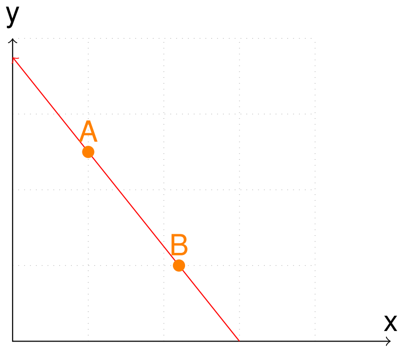
$$h(A(x, y, \underline{s}, \overline{s}), A(x_n, y_n, \underline{s}_n, \overline{s}_n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{8}$$

Lemat 2. Załóżmy, że $r_t^m(x,y)$ jest rodziną o càdlàg trajektoriach zależną od $(x,y) \in R_+^2$ i $m = 1, 2 \ldots$ tzn. dla każdego m odwzorowanie $[0,T] \ni t \mapsto r_t^m(x,y)$ jest càdlàg i ponadto dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ odwzorowanie $R_+^2 \ni (x,y) \mapsto r_t^m(x,y)$ jest ciągłe, jednostajnie względem t przy (x,y) ze zwartych podzbiorów R_+^2. Jeżeli dla każdego zwartego zbioru $K \subset R_+^2$ istnieje $r_t(x,y)$ dla $(x,y) \in K \cap Q^2$ i $t \in [0,T] \cap Q$ takie, że $\sup_{t\in[0,T]\cap Q} \sup_{(x,y)\in K\cap Q^2} |r_t^m(x,y) - r_t(x,y)| \to 0$ gdy $m \to \infty$, to wtedy $r_t(x,y) := \lim_{[0,T]\cap Q \ni t_n \downarrow t, Q^2 \cap R_+^2 \ni (x_n,y_n) \to (x,y)} r_{t_n}(x_n,y_n)$ zdefiniowane dla każdego $(x,y) \in R_+^2$ jest takie, że odwzorowanie $[0,T] \ni t \mapsto r_t(x,y)$ jest càdlàg i odwzorowanie $R_+^2 \ni (x,y) \mapsto r_t(x,y)$ jest ciągłe, jednostajnie względem t dla (x,y) ze zwartych podzbiorów R_+^2. Ponadto $r_t(x,y)$ nie zależy od ciągów $t_n \downarrow t$ i $(x_n,y_n) \to (x,y)$.

Główne pytania:

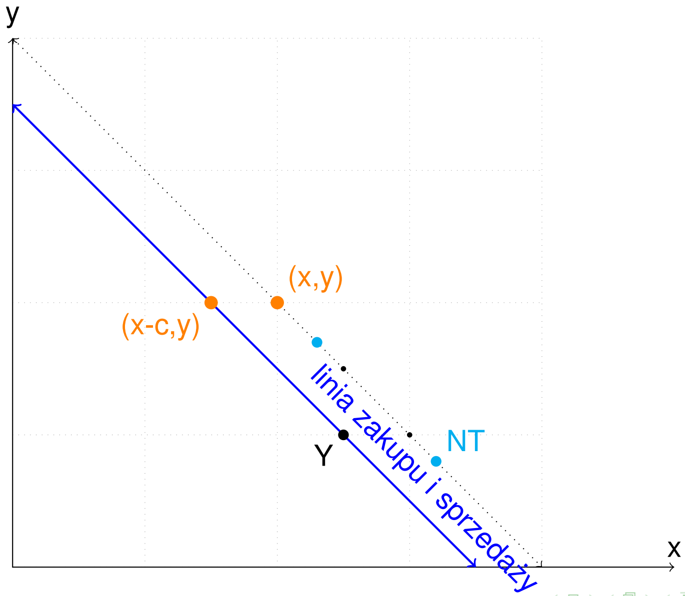
- czy przy takim poziomie ogólności ma sens układ równań Bellmana? (tak) co to znaczy? poza zbiorem miary zero istnieją modyfikacje, które spełniają te równania
- jeśli wprowadzimy dodatkowo stałe koszty za transakcje to czy problem ma rozwiązanie bez ograniczenia na liczbę transakcji (będzie ona skończona ale losowa), (tak)
- jak w praktyce rozwiązać ten problem? (jest problem)
- model z czasem dyskretnym (bez stałych kosztów): nie ma optymalnego stopowania, mamy indukcję wstecz i kolejne iteracje dają nam funkcje wklęsłe; wyznaczenie optymalnej strategii sprowadza się do znalezienia odpowiednich dwóch punktów (przeważnie jednego na linii kupna lub sprzedaży)

Zakup, sprzedaż, brak transakcji



linia zakupu: odcinek *AB* brak transakcji, powyżej A sprzedaż, poniżej *B* zakup do punktu *B*; podobnie mamy na linii sprzedaży

Model ze stałymi kosztami za transakcje



Opis postępowania - stałe koszty za transakcje

c stałe koszty za transakcje

maksymalizujemy funkcję $w(x, y)$ która jest rosnąca po współrzędnych

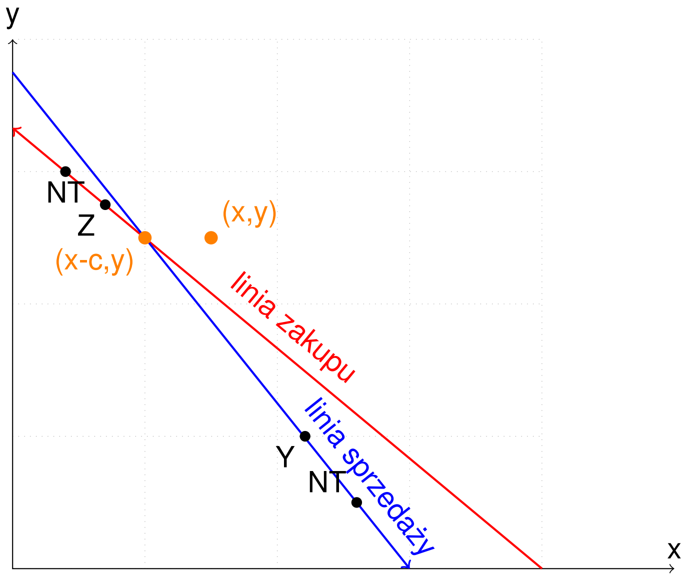
funkcja w osiąga swe maksimum na prostej przechodzącej przez $(x - c, y)$ w punkcie Y. Porównujemy wartości $w(x, y)$ i $w(Y)$.

Jeżeli $w(x, y) \geq w(Y)$ to punkt (x, y) należy do NT;

jeżeli $w(x, y) < w(Y)$ to punkt (x, y) to należy dojść (sprzedając lub kupując akcje) do punktu Y i w zależności od tego (x, y) jest w strefie sprzedaży lub zakupu.

Zauważmy, że nawet gdy w jest wklęsła ze względu na (x, y) to $\hat{w}(x, y) = \max\{w(x, y), w(Y)\}$ nie jest funkcją wklęsłą.

Model ze stałymi i proporcjonalnymi kosztami



Opis - stałe i proporcjonalne koszty za transakcje

mamy ponownie funkcję $w(x, y)$ rosnącą ze względu na współrzędne

punkt Y oznacza supremum w na linii zakupu od punktu $(x - c, y)$ w lewo (Y zależy od (x, y))

punkt Z oznacza supremum w na linii sprzedaży od punktu $(x - c, y)$ w prawo (Z zależy od (x, y))

porównujemy trzy wartości $w(x, y)$, $w(Y)$ i $w(Z)$ obliczając $\hat{w}(x, y) = \max\{w(x, y), w(Y), w(Z)\}$. Jeżeli $w(Y)$ jest największe to (x, y) należy do strefy sprzedaży i należy sprzedać akcje by dojść do Y. Jeżeli $w(Z)$ jest największe to (x, y) należy do strefy zakupu i należy kupić akcje by dojść do Z.

Jeżeli $\hat{w}(x, y) = w(x, y)$ to (x, y) należy do strefy braku transakcji (NT).

Równania Bellmana dla co najwyżej r transakcji

$$V_0(x,y,\underline{s},\overline{s}) := U(x+y^+\underline{s})$$
$$\bar{V}_1(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) :=$$
$$\max\left\{esssup_{(l,m)\in\mathcal{A}_t(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t)} E\left[V_0(x+m\underline{s}_t - l\overline{s}_t - c,\right.\right.$$
$$\left.\left. y-m+l,\underline{s}_T,\overline{s}_T)|F_t\right],\ E[V_0(x,y,\underline{s}_T,\overline{s}_T)|F_t]\right\}$$
$$V_1(x,y,t) := esssup_{t\le\tau\le T} E\left[\bar{V}_1(x,y,\underline{s}_\tau,\overline{s}_\tau,\tau)|F_t\right]$$
$$\bar{V}_2(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) :=$$
$$\max\left\{esssup_{(l,m)\in\mathcal{A}_t(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t)} V_1(x+m\underline{s}_t - l\overline{s}_t - c, y-m+l,t),\right.$$
$$\left. V_1(x,y,t)\right\}$$
$$V_2(x,y,t) := esssup_{t\le\tau\le T} E\left[\bar{V}_2(x,y,\underline{s}_\tau,\overline{s}_\tau,\tau)|F_t\right]\ldots$$
$$\bar{V}_r(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t,t) :=$$
$$\max\left\{esssup_{(l,m)\in\mathcal{A}_t(x,y,\underline{s}_t,\overline{s}_t)} V_{r-1}(x+m\underline{s}_t - l\overline{s}_t - c, y-m+l,t),\right.$$
$$\left. V_{r-1}(x,y,t)\right\}$$
$$V_r(x,y,t) := esssup_{t\le\tau\le T} E\left[\bar{V}_r(x,y,\underline{s}_\tau,\underline{s}_t,\tau)|F_t\right]$$

Funkcja bogactwa i założenia

$W(x, y, t) =$
$esssup_{\tau_i, l_i, m_i} \left[x + \sum_i \left(m_i \underline{s}_{\tau_i} - l_i \underline{s}_{\tau_i}\right) + (y - \sum_i (l_i - m_i))\, \underline{s}_T\right]$
dla strategii dopuszczalnych przy kosztach proporcjonalnych
$W^c(x, y, t) = esssup_{\tau_i, l_i, m_i} \left[x + \sum_i \left(m_i \underline{s}_{\tau_i} - l_i \underline{s}_{\tau_i} - c1_{m_i \neq 0 or l_i \neq 0}\right)\right.$
$\left. + (y - \sum_i (l_i - m_i))\, \underline{s}_T\right]$
dla strategii dopuszczalnych przy kosztach stałych i proporcjonalnych

Założenie Dla każdego zwartego $K \subset (R^+)^2$ istnieje $p > 1$ takie, że

$$E\left[Z^p(K)\right] < \infty$$

gdzie

$$esssup_{t \in [0,T]} esssup_{(x,y) \in K} W(x, y, t) := Z(K) < \infty$$

wtedy $\bar{V}_r(x, y, \underline{s}_t, \overline{s}_t, t) \uparrow \bar{V}(x, y, \underline{s}_t, \overline{s}_t, t)$ i $V_r(x, y, t) \uparrow V(x, y, t)$,

Równanie Bellmana dla stałych i proporcjonalnych kosztów

$$\bar{V}(x, y, \underline{s}_t, \bar{s}_t, t) =$$
$$\max\left\{esssup_{(l,m)\in\mathcal{A}_t(x,y,\underline{s}_t,\bar{s}_t)} V(x + m\underline{s}_t - l\bar{s}_t - c, y - m + l, t),\right.$$
$$\left. V(x, y, t)\right\}$$
$$V(x, y, t) := esssup_{t\leq\tau\leq T} E\left[\bar{V}(x, y, \underline{s}_\tau, \underline{s}_t, \tau)|F_t\right]$$

gdzie $V(x, y, t)$ to optymalna wartość funkcjonału przy pozycji (x, y) w chwili t z końcowym terminem T.

Funkcje $\bar{V}$ i V są ciągłe jednostajnie względem t przy (x, y) ze zbioru zwartego, i càdlàg ze względu na t, przy ustalonych (x, y). Powyższe równania wyznaczają prawie optymalne strategie.

Problemy:

modele z czasem ciągłym:

- proporcjonalne koszty za transakcje r transakcji: spójność stref zakupu, sprzedaży i braku transakcji,

- stałe i proporcjonalne koszty za transacje: spójność stref zakupu, sprzedaży i braku transakcji,

- inaczej istnienie jedynych lokalnych maksimów na liniach zakupu i sprzedaży,

- funkcje jedno modalne przy całkowaniu jedno modalnym przechodzą na funkcje jednomodalne w $(R^+)^2$, Dziękuję za uwagę!