Reprezentacja martyngałowa względem addytywnych procesów Markowa-Itô

Anna Sulima

Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
Instytut Nauk Ekonomicznych PAN

Wyniki wspólne z prof. Ł. Stettnerem (IM PAN) i prof. Z. Palmowskim (UWr)

Oznaczenia

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna,
- $\mathbb{T} := [0; T]$, gdzie $T < \infty$,
- $\mathbf{J} := \{\mathbf{J}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ - nieredukowalny łańcuch Markowa,
- $E := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_N\}$, gdzie $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^N$ oraz j-ta współrzędna $\mathbf{e}_i$ jest deltą Kroneckera δ_{ij} dla każdego $i, j = 1, 2, ..., N$,
- $\mathbf{\Lambda}(t) = [\lambda_{ij}(t)]_{i,j=1,2,...,N}$- macierz intensywności przejścia ze stanu i do stanu j.

Proces Markowsko addytywny

Proces $\{(X(t), J(t)) : t \geq 0\}$ nazywamy Markowsko addytywny jeśli:
1. $\{(X(t), J(t)) : t \geq 0\}$ jest procesem Markowa,
2. Rozkład warunkowy $(X(t+s) - X(t), J(t+s))$ względem $(X(t), J(t))$ zależy tylko od $J(t)$.

Proces Markowsko addytywny

$$X(t) = \overline{X}(t) + \overline{\overline{X}}(t),$$

gdzie

$$\overline{\overline{X}}(t) := \sum_{j \in E} \Psi_j(t),$$

$$\Psi_j(t) := \sum_{n \geq 1} U_n^{(j)} \mathbf{1}_{\{J(T_n)=\mathbf{e}_j,\ T_n \leq t\}}.$$

Zakładamy, że $U_n^{(i)}$ $(n \geq 1, 1 \leq i \leq N)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, które są niezależne od J oraz dla ustalonego i, $U_n^{(i)}$ mają ten sam rozkład.

Proces Lévyego-Itô

$$\overline{X}(t) = \overline{X}(0) + \int_0^t \mu_0(s)ds + \int_0^t \sigma_0(s-)dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,x)\bar{\Pi}(ds,dx),$$

gdzie $W(t)$ jest ruchem Browna niezależnym od $J(t)$,
$\bar{\Pi}(dt,dx) = \bar{\Pi}(dt,dx) - \nu(dx)dt$ jest skompensowaną miarą Poissona niezależną od $W(t)$ i od $J(t)$. Ponadto
$\mu_0(t) = \langle \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{J}(t)\rangle = \sum_{i=1}^N \mu_i < \mathbf{e}_i, \mathbf{J}(t) >$,
$\sigma_0(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{J}(t)\rangle = \sum_{i=1}^N \sigma_i < \mathbf{e}_i, \mathbf{J}(t) >$,
$\gamma(t,x) = \langle \boldsymbol{\gamma}(x), \mathbf{J}(t)\rangle = \sum_{i=1}^N \gamma_i(x) < \mathbf{e}_i, \mathbf{J}(t) >$,
gdzie $\boldsymbol{\gamma}(x) := (\gamma_1(x), \gamma_2(x), ..., \gamma_i(x))$, $\boldsymbol{\mu}_0 := (\mu_0^1, \mu_0^2, ..., \mu_0^N)' \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\sigma}_0 := (\sigma_0^1, \sigma_0^2, ..., \sigma_0^N)' \in \mathbb{R}^N$ oraz $\sigma_0^i > 0$, $\mu_0^i > r_i$ dla każdego $i = 1, 2, ..., N$.

Skokowy martyngał Markova

Niech $T_n, n = 1, 2, ...$ będzie okresem skoku łańcucha Markova $\mathbf{J}$ i niech $\mathbf{J}_n := \mathbf{J}(T_n)$. Wtedy proces skokowy $\Phi_j(t)$ definiujemy jako:

$$\Phi_j(t) := \Phi([0, t] \times \mathbf{e}_j) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t, \mathbf{J}_n = \mathbf{e}_j\}}.$$

Niech $\phi_j(t) := \int_0^t \lambda_j(s)ds$, gdzie $\lambda_j(t) := \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{\{\mathbf{J}(t-) = \mathbf{e}_j\}} \lambda_{ij}$ dla każdego $j = 1, 2, ..., N$.
Wtedy proces

$$\bar{\Phi}_j(t) := \Phi_j(t) - \phi_j(t)$$

nazywamy skokowym martyngałem Markova.

Martyngały potęgowo-skokowe Lévyego-Itô

Corcuera, Nualart and Schoutens [2003]
Niech

$$X^{(k)}(t) := \sum_{0<s\leq t} (\Delta X(s))^k, \qquad k \geq 2,$$

gdzie $\Delta X(s) = X(s) - X(s-)$ oraz bierzemy $X^{(1)}(s) = \overline{X}(s)$. Ponadto

$$\mathbb{E}X^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left(\sum_{0<s\leq t} (\Delta X(s))^k \right) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma^k(s,x)\nu(dx)ds < \infty, \qquad k \geq 2,$$

zatem

$$\overline{X}^{(k)}(t) := X^{(k)}(t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma^k(s,x)\nu(dx)ds, \qquad k \geq 2,$$

nazywamy martyngałami potęgowo-skokowymi.

Martyngały potęgowo-skokowe

Niech

$$\Psi_j^{(l)}(t) := \sum_{n \geq 1} \left(U_n^{(j)} \right)^l \mathbf{1}_{\{J(T_n)=\mathbf{e}_j,\ T_n \leq t\}}, \qquad l \geq 1.$$

Wtedy

$$\overline{\Psi}_j^{(l)}(t) := \Psi_j^{(l)}(t) - \mathbb{E}\Psi_j^{(l)}(t)$$

nazywamy martyngałem potęgowo-skokowym.

Twierdzenie reprezentacyjne

Niech $\mathcal{F}_t := \sigma\{\overline{X}(s), \overline{\Phi}_1(s), ..., \overline{\Phi}_N(s), \overline{\Psi}_1(s), ..., \overline{\Psi}_N(s); s \leq t\}$ oraz $\mathcal{F} := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.
Każdy martyngał całkowalny z kwadratem $M(t)$ możemy przedstawić jako:

$$\begin{aligned} M(t) &= M(0) + \int_0^t h_X^{(1)}(s) d\overline{X}(s) + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^t h_X^{(k)}(s) d\overline{X}^{(k)}(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t h_\Phi^{(j)}(s) d\overline{\Phi}_j(s) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_\Psi^{(l,i)}(s) d\overline{\Psi}_i^{(l)}(s), \end{aligned}$$

gdzie $h_X^{(1)}(t), h_X^{(2)}(t), ..., h_\Phi^{(1)}(t), h_\Phi^{(2)}(t), ..., h_\Phi^{(N)}(t), h_\Psi^{(1,1)}(t), h_\Psi^{(1,2)}(t), ...$ są procesami prognozowalnymi.

Lemat 1.

Mamy następującą reprezentację:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}^{g}(t)\overline{\Phi}_j(t)\overline{\Psi}_i^{b}(t) \quad = \quad & f^{g+b+1}(t) + \sum_{s=1}^{g}\sum_{\upsilon=1}^{b} \sum_{\substack{(\iota_1,\ldots,\iota_{s+\upsilon}) \\ \in\{1,\ldots,g+b\}^{s+\upsilon}}} \int_0^{t}\int_0^{t_1-} \ldots \\
& \int_0^{t_{s+\upsilon}-} f^{g+b+1}_{(\iota_1,\ldots,\iota_{s+\upsilon})}(t,0,t_1,t_2,\ldots,t_{s+\upsilon+1})\,d\overline{\Psi}_i^{(\iota_\upsilon)}(t_{s+\upsilon+1})\ldots \\
& d\overline{\Psi}_i^{(\iota_1)}(t_{s+2})\,d\overline{\Phi}_j(t_{s+1})\,d\overline{X}^{(\iota_s)}(t_s)\ldots d\overline{X}^{(\iota_2)}(t_2)\,d\overline{X}^{(\iota_1)}(t_1),
\end{aligned}
$$

gdzie $f^{g+b+1}_{(\iota_1,\ldots,\iota_{s+\upsilon})}$ są funkcjami deterministycznymi w $L^2(\mathbb{R}_+^{s+\upsilon})$.

Lemat 2.

Niech

$$\mathcal{P} := \Big\{ \overline{X}^{g_1}(t_1)\big(\overline{X}(t_2) - \overline{X}(t_1)\big)^{g_2} \cdot \ldots \cdot \big(\overline{X}(t_m) - \overline{X}(t_{m-1})\big)^{g_m}$$
$$\times \prod_{i,j=1}^{N} \overline{\Phi}_j(t_1)\big(\overline{\Phi}_j(t_2) - \overline{\Phi}_j(t_1)\big) \cdot \ldots \cdot \big(\overline{\Phi}_j(t_m) - \overline{\Phi}_j(t_{m-1})\big)$$
$$\cdot \overline{\Psi}_i^{b_1}(t_1)\big(\overline{\Psi}_i(t_2) - \overline{\Psi}_i(t_1)\big)^{b_2} \cdot \ldots \cdot \big(\overline{\Psi}_i(t_m) - \overline{\Psi}_i(t_{m-1})\big)^{b_m} : 0 \leq t_1 < \ldots$$
$$< t_m, g_1, \ldots, g_m \geq 1, b_1, \ldots, b_m \geq 1 \Big\}.$$

Liniowa podprzestrzeń rozpięta nad $\mathcal{P}$ jest gęsta w $L^2(\Omega, \mathcal{F})$.

Szkic dowodu twierdzenia reprezentacyjnego

Z Lematu 1. i 2. każdą zmienną losową F w $L^2(\Omega, \mathcal{F})$ możemy przedstawić jako:

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}(F) + \int_0^\infty h_X^{(1)}(s) d\overline{X}(s) + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^\infty h_X^{(k)}(s) d\overline{X}^{(k)}(s) \qquad (1) \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty h_\Phi^{(j)}(s) d\overline{\Phi}_j(s) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty h_\Psi^{(l,i)}(s) d\overline{\Psi}_i^{(l)}(s), \end{aligned}$$

gdzie $h_X^{(1)}(t), h_X^{(2)}(t), ..., h_\Phi^{(1)}(t), h_\Phi^{(2)}(t), ..., h_\Phi^{(N)}(t), h_\Psi^{(1,i)}(t), h_\Psi^{(2,i)}(t), ...$ są procesami prognozowalnymi. Jeśli $M \in \mathcal{M}^2$, wtedy $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(M^2(t)) = \mathbb{E}(M^2(\infty)) < \infty$ oraz $M(t) = \mathbb{E}[M(\infty) \mid \mathcal{F}_t]$, co kończy dowód.

Dynamika ceny instrumentu bez ryzyka:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, B(0) = 1,$$

gdzie $r(t) =< \mathbf{r}, \mathbf{J}(t) >= \sum_{i=1}^{N} r_i < \mathbf{e}_i, \mathbf{J}(t) >$, $\mathbf{r} := (r_1, r_2, ..., r_N)' \in \mathbb{R}^N$, $r_i > 0$ dla każdego $i = 1, 2, ..., N$.

Dynamika cen akcji

$$dS_0(t) = S_0(t-)\Big(\mu_0(t)dt + \sigma_0(t-)dW(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,x)\bar{\Pi}(dt,dx)\Big),$$

$$S_0(0) = s_0 > 0.$$

Dynamika cen skokowych instrumentów finansowych

$$dS_j(t) = S_j(t-)[\mu_j(t-)dt + \sigma_j(t-)d\bar{\Phi}_j(t)], \quad S_j(0) > 0,$$

gdzie

$$\mu_j(t) = \langle \boldsymbol{\mu}_j, \mathbf{J}(t) \rangle = \sum_{i=1}^{N} \mu_j^i < \mathbf{e}_i, \mathbf{J}(t) >,$$

$$\sigma_j(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}_j, \mathbf{J}(t) \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sigma_j^i < \mathbf{e}_i, \mathbf{J}(t) >,$$

$\boldsymbol{\mu}_j := (\mu_j^1, \mu_j^2, ..., \mu_j^N)' \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\sigma}_j := (\sigma_j^1, \sigma_j^2, ..., \sigma_j^N)' \in \mathbb{R}^N, j = 1, 2, ..., N$.

Dynamika cen potęgowo-skokowych instrumentów finansowych

$$S^{(k)}(t) = S^{(k)}(t-)[r(t)dt + \sigma^{(k)}(t-)d\overline{X}^{(k)}(t)],$$
$$S^{(k)}(0) > 0.$$

gdzie

$$\sigma^{(k)}(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(k)}, J(t)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^{(k)} < \mathbf{e}_j, J(t) >,$$

$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} := (\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, ..., \sigma_N^{(k)})' \in \mathbb{R}^N$ dla $k \geq 2$.

Dynamika cen potęgowo-skokowych instrumentów finansowych

$$dS_i^{(l)}(t) = S_i^{(l)}(t-)[r(t)dt + \sigma_i^{(l)}(t-)d\overline{\Psi}_i^{(l)}(t)],$$

$$S_i^{(l)}(0) > 0.$$

gdzie

$$\sigma_i^{(l)}(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}_i^{(l)}, J(t)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}^{(l)} < \mathbf{e}_j, J(t) >,$$

$\boldsymbol{\sigma}_i^{(l)} := (\sigma_{i1}^{(l)}, \sigma_{i2}^{(l)}, ..., \sigma_{iN}^{(l)})' \in \mathbb{R}^N$ dla $l \geq 1$ oraz $i = 1, ..., N$.

Rozszerzony model Blacka-Scholesa-Mertona

$$\begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt, \\ dS_0(t) = S_0(t-)\left(\mu_0(t)dt + \sigma_0(t-)dW(t) + \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t,x)\overline{N}(dt,dx)\right), \\ dS_j(t) = S_j(t-)[\mu_j(t)dt + \sigma_j(t-)d\overline{\Phi}_j(t)], \\ dS^{(k)}(t) = S^{(k)}(t-)[r(t)dt + \sigma^{(k)}(t-)d\overline{X}^{(k)}(t)], \\ dS_i^{(l)}(t) = S_i^{(l)}(t-)[r(t)dt + \sigma_i^{(l)}(t-)d\overline{\Psi}_i^{(l)}(t)], \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $i, j = 1, ..., N$, $k = 2, 3, ...$ oraz $l = 1, 2, 3, ...$.

Twierdzenie o zupełności rozszerzonego modelu Blacka-Scholesa-Mertona

Rozszerzony model Blacka-Scholesa-Mertona jest zupełny (każda wypłata jest doskonale replikowalna).

Szkic dowodu

Niech

$$M(t) := E[\exp(-\int_0^T r(s)ds)A \mid \mathcal{F}_t]$$

oraz

$$\begin{aligned} M^K(t) &= M^K(0) + \int_0^t h_0(s)d\bar{X}^{\mathbb{Q}}(s) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t h_j(s)d\bar{\Phi}_j^{\mathbb{Q}}(s) \\ &+ \sum_{k=2}^{K} \int_0^t h^{(k)}(s)d\bar{X}^{(k)}(s) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{K} \int_0^t h_i^{(l)}(s)d\overline{\Psi}_i^{(l)}(s). \end{aligned}$$

Wtedy

$$\lim_{K\to\infty} M^K(t) = M(t).$$

Definiujemy portfel:

$$\theta^K(t) := (\alpha^K(t), \beta_0(t), \beta_1(t), ..., \beta_N(t), \beta^{(1)}(t), ..., \beta^{(K)}(t), \beta_1^{(1)}(t), ..., \beta_N^{(K)}(t)).$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\alpha^K(t) &:= M^K(t-) - \beta_0(t)B^{-1}(t)S_0(t-) - \sum_{j=1}^{N} \beta_j(t)B^{-1}(t)S_j(t-) \\
&\quad - \sum_{k=2}^{K} \beta^{(k)}(t)B^{-1}(t)S^{(k)}(t-) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{K} \beta_i^{(l)}(t)B^{-1}(t)S_i^{(l)}(t-), \\
\beta_0(t) &:= h_0(t)B(t)S_0^{-1}(t-), \\
\beta_j(t) &:= \frac{h_j(t)}{\sigma_j(t-)}B(t)S_j^{-1}(t-), \\
\beta^{(k)}(t) &:= \frac{h^{(k)}(t)}{\sigma^{(k)}(t-)}B(t)(S^{(k)})^{-1}(t-), \\
\beta_i^{(l)}(t) &:= \frac{h_i^{(l)}(t)}{\sigma_i^{(l)}(t-)}B(t)(S_i^{(l)})^{-1}(t-).
\end{aligned}$$

Replikacja:

$$V^K(t) = \alpha^K(t)B(t) + \beta_0(t)S_0(t) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j(t)S_j(t) + \sum_{i=2}^{N} \beta^{(i)}(t)S^{(i)}(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{K} \beta_i^{(l)}(t)\Delta S_i^{(l)}(t) = M^K(t)B(t).$$

Proces zdefiniowany następująco:

$$G^K(u) = \int_0^u \alpha^K(t)dB(t) + \int_0^u \beta_0(t)dS_0(t) + \sum_{j=1}^{N}\int_0^u \beta_j(t)dS_j(t)$$

$$+ \sum_{k=2}^{K}\int_0^u \beta^{(k)}(t)dS^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{K}\int_0^u \beta_i^{(l)}(t)dS_i^{(l)}(t)$$

nazywamy procesem zysku. Można pokazać że $G^K(u) + M(0) = M^K(u)B(u)$, co implikuje, że portfel jest samofinansujący.

Bibliografia

- Boel R., Kohlmann M., Semimartingale models of stochastic optimal control, with applications to double Martingales, SIAM Journal on Control and Optimization 18 (1980), p.511-533.
- Corcuera J.M., Nualart D., Schoutens W., Completion of a Levy market by power-jumpassets, Finance and Stochastics, 9(1)(2003), p.109-127.
- Oksendal B., Sulem A., Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Springer, 2004.
- Palmowski Z., Stettner Ł. and Sulima A. (2016) *A note on chaotic and predictable representations for Itô-Markov additive processes*, w przygotowaniu
- Zhang X., Kuen Siu T., Meng Q., Portfolio Selection in the Enlarged Markovian Regime-Switching Market, SIAM Journal of Control and Optimization, 48 (2010), p.3368-3388.