Stochastyczne inkluzje względem dwuparametrowego martyngału

Kamil Łukasz Świątek

XLV Konferencja Zastosowań Matematyki, 6-13 wrzesień 2016

Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Plan prezentacji

1. Wprowadzenie
2. Wielowartościowa całka stochastyczna typu funkcyjnego względem dwuparametrowego L^2-martyngału
3. Stochastyczne inkluzje i wielowartościowe równania stochastyczne typu funkcyjnego względem dwuparametrowego L^2-martyngału
4. Literatura

Wprowadzenie

- Cairoli R., Walsh J.B., Stochastic integrals in the plane, *Acta Math.* 134, 1975, 111–183.
- Tudor C., On the existence and the uniqueness of solutions to stochastic integral equations with two-dimensional time parameter, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 24, 1979, 817–827.
- Yeh J., Existence of strong solutions for stochastic differential equations in the plane, *Pacific J. Math.* 97, 1981, 217–247.
- Z. Liang, Existence and pathwise uniqueness of solutions for stochastic differential equations with respect to martingales in the plane, *Stochastic Process. Appl.*, 83, 1999, 303–317.
- Zhang X., Zhu J., Non-Lipschitz stochastic differential equations driven by multi-parameter Brownian motions, *Stoch. Dyn.* 6, 2006, 329–340.

- Kennedy D.P., Characterizing Gaussian models of the term structure of interest rates, *Mathematical Finance* 7, 1997, 107–118.
- Goldstein R.S., The term structure of interest rates as a random field, *The Review of Financial Studies.* 13, 2000, 365–384.
- Repplinger D., *Pricing of bond options. Unspanned stochastic volatility and random field models,* Springer, Berlin, 2008.
- Di Nunno G., Eide I.B., Minimal-variance hedging in large financial markets: random fields approach, *Stoch. Anal. Appl.* 28, 2010, 54–85.

Wielowartościowa całka stochastyczna typu funkcyjnego względem dwuparametrowego martyngału

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t)\in[0,S]\times[0,T]}, P)$. Będziemy rozważać

$$L^{2,d}_{\mathcal{P}}(\mu_M) := L^2([0,S]\times[0,T]\times\Omega, \mathcal{P}, \mu_M; \mathbb{R}^d).$$

Niech $F : [0,S]\times[0,T]\times\Omega \to \mathcal{K}^b_c(\mathbb{R}^d)$ będzie:

- przewidywalne ($\mathcal{P}$-mierzalne),
- $L^{2,d}_{\mathcal{P}}(\mu_M)$-całkowo ograniczone.

Wówczas

$$\mathcal{S}^2_{\mathcal{P}}(F,\mu_M) := \left\{ f \in L^{2,d}_{\mathcal{P}}(\mu_M) : f \in F \ \mu_M\text{-p.w.} \right\}.$$

Definicja 1

Wielowartościową całką stochastyczną typu funkcyjnego odwzorowania $F : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ *względem dwuparametrowego* L^2*-martyngału* M *nazywamy zbiór*

$$\int_{[s,s']\times[t,t']} F_{u,v} dM_{u,v} := \left\{ \int_{[s,s']\times[t,t']} f_{u,v} dM_{u,v} : f \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{P}}(F, \mu_M) \right\}$$

dla każdego $(s, t), (s', t') \in [0, S] \times [0, T]$, *gdzie* $(s, t) \preceq (s', t')$.

Twierdzenie 1

Niech $F : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ *będzie przewidywalnym i* $L^{2,d}_{\mathcal{P}}(\mu_M)$*-całkowo ograniczonym wielowartościowym procesem stochastycznym. Wtedy*

$$\int_{[s,s']\times[t,t']} F_{u,v} dM_{u,v}$$

jest niepustym, wypukłym i słabo zwartym podzbiorem przestrzeni $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{s',t'}, P; \mathbb{R}^d)$.

Twierdzenie 2

Niech $F, G : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ *będą przewidywalnymi i* $L_{\mathcal{P}}^{2,d}(\mu_M)$*-całkowo ograniczonymi wielowartościowymi procesami stochastycznymi. Wtedy*

$$H_{L^{2,d}}^2\left(\int\limits_{[s,s']\times[t,t']} F_{u,v}dM_{u,v}, \int\limits_{[s,s']\times[t,t']} G_{u,v}dM_{u,v}\right)$$

$$\leqslant \int\limits_{[s,s']\times[t,t']\times\Omega} H_{\mathbb{R}^d}^2(F, G)d\mu_M.$$

Twierdzenie 3

Niech $F : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ *będzie przewidywalnym i* $L^{2,d}_{\mathcal{P}}(\mu_M)$*-całkowo ograniczonym wielowartościowym procesem stochastycznym. Jeżeli* M *jest ciągłym* L^2*-martyngałem, to*

$$[0, S] \times [0, T] \ni (s, t) \mapsto \int_{[0,s]\times[0,t]} F_{u,v} dM_{u,v} \in \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$$

jest ciągłe względem metryki $H_{L^{2,d}}$.

Stochastyczne inkluzje i wielowartościowe równania stochastyczne typu funkcyjnego względem dwuparametrowego martyngału

Niech

$$M : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R},$$

$$A : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}.$$

Załóżmy, że

$$\mathbb{E}A^2_{S,T} < \infty \text{ oraz } \partial A = \partial M = 0.$$

Niech

$$L^{2,d} := L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^d),$$

$$(\mathcal{K}^b_c(L^{2,d}), H_{L^{2,d}}).$$

Niech
$$F, G : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times L^{2,d} \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d).$$
Załóżmy, że
$$\xi : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$
jest takim $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t)\in[0,S]\times[0,T]}$-adaptowanym i całkowalnym z kwadratem procesem stochastycznym, że odwzorowanie
$$[0, S] \times [0, T] \ni (s, t) \mapsto \xi(s, t, \cdot) \in L^{2,d}$$
jest ciągłe. Niech
$$\Delta_{s,t}^{s',t'}(x) := x(s', t') - x(s', t) - x(s, t') + x(s, t).$$

Stochastyczną inkluzją względem dwuparametrowego martyngału generowaną przez (F, G, ξ) nazywamy następującą relację

$$\begin{cases} \Delta_{s,t}^{s',t'}(x) \in \int\limits_{[s,s']\times[t,t']} F(u,v,x(u,v))\, dA_{u,v} \\ \qquad + \int\limits_{[s,s']\times[t,t']} G(u,v,x(u,v))\, dM_{u,v} \\ x(0,t) = \xi(0,t) \\ x(s,0) = \xi(s,0) \end{cases} \tag{1}$$

dla każdego $(s,t), (s',t') \in [0,S] \times [0,T]$, gdzie $(s,t) \preceq (s',t')$.

Rozwiązaniem inkluzji (1) generowanej przez (F, G, ξ) nazywamy $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{(s,t)\in[0,S]\times[0,T]}$-adaptowalny proces

$$x : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$

spełniający warunki:

- $[0, S] \times [0, T] \ni (s, t) \mapsto x(s, t, \cdot) \in L^{2,d}$ jest ciągłe,
- $x : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ ma reprezentację

$$x(s, t) + \xi(0, 0) - \xi(s, 0) - \xi(0, t)$$

$$= \int_{[0,s]\times[0,t]} f_1(u, v)\, dA_{u,v} + \int_{[0,s]\times[0,t]} g_1(u, v)\, dM_{u,v}$$

dla pewnego $f_1 \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{P}}(F \circ x, \nu_A)$ i $g_1 \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{P}}(G \circ x, \mu_M)$.

Niech $F, G : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times L^{2,d} \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Załóżmy, że:

(A1) dla każdego $\eta \in L^{2,d}$ odwzorowania

$$F(\cdot,\cdot,\cdot,\eta), G(\cdot,\cdot,\cdot,\eta) : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$$

są przewidywalne,

(A2) istnieje taka stała $L > 0$, że zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} \max\{H_{\mathbb{R}^d}(F(s,t,\omega,\eta_1), F(s,t,\omega,\eta_2)),& \\ H_{\mathbb{R}^d}(G(s,t,\omega,\eta_1), G(s,t,\omega,\eta_2))\} &\leqslant L\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^{2,d}}, \end{aligned}$$

(A3) istnieje taka stała $K > 0$, że spełniony jest warunek

$$\max\{H_{\mathbb{R}^d}(F(s,t,\omega,\eta), \{\theta\}), H_{\mathbb{R}^d}(G(s,t,\omega,\eta), \{\theta\})\} \leqslant K(1 + \|\eta\|_{L^{2,d}}).$$

Niech $F, G : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times L^{2,d} \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$. Rozważmy

$$\hat{F}, \hat{G} : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times \mathcal{K}_c^b(L^{2,d}) \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$$

zdefiniowane w następujący sposób

$$\hat{F}(s, t, \omega, B) := \overline{co}\Big(\bigcup_{b \in B} F(s, t, \omega, b)\Big)$$

oraz

$$\hat{G}(s, t, \omega, B) := \overline{co}\Big(\bigcup_{b \in B} G(s, t, \omega, b)\Big)$$

dla $(s, t, \omega, B) \in [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$.

Wówczas $\hat{F}, \hat{G} : [0,S] \times [0,T] \times \Omega \times \mathcal{K}_c^b(L^{2,d}) \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ spełniają:

- dla każdego $B \in \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$ odwzorowania
$$\hat{F}(\cdot,\cdot,\cdot,B), \hat{G}(\cdot,\cdot,\cdot,B) : [0,S] \times [0,T] \times \Omega \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$$
są przewidywalne,
- istnieje taka stała $L_1 > 0$, że spełniony jest warunek
$$\max\Big\{H_{\mathbb{R}^d}(\hat{F}(s,t,\omega,B), \hat{F}(s,t,\omega,C)), \\ H_{\mathbb{R}^d}(\hat{G}(s,t,\omega,B), \hat{G}(s,t,\omega,C))\Big\} \leqslant L_1 H_{L^{2,d}}(B,C),$$
- istnieje taka stała $K_1 > 0$, że zachodzi nierówność
$$\max\{H_{\mathbb{R}^d}(\hat{F}(s,t,\omega,B), \{\theta\}), H_{\mathbb{R}^d}(\hat{G}(s,t,\omega,B), \{\theta\})\} \\ \leqslant K_1 (1 + H_{L^{2,d}}(B, \{\Theta\})).$$

Niech $\psi : [0, S] \times [0, T] \to \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$ będzie ciągłe oraz załóżmy, że

(A4) $\xi(s,0) + \xi(0,t) - \xi(0,0) \in (\psi(s,0) + \psi(0,t)) \ominus \psi(0,0)$ dla każdego $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$.

Przez wielowartościowe równanie stochastyczne stowarzyszone z inkluzją (1) rozumiemy następującą relację w $(\mathcal{K}_c^b(L^{2,d}), H_{L^{2,d}})$:

$$\begin{aligned} X(s,t) + \psi(0,0) &= \psi(s,0) + \psi(0,t) \\ &+ \int_{[0,s]\times[0,t]} \hat{F}(u,v,X(u,v))\, dA_{u,v} \\ &+ \int_{[0,s]\times[0,t]} \hat{G}(u,v,X(u,v))\, dM_{u,v} \end{aligned} \tag{2}$$

dla $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$.

Rozwiązaniem równania (2) nazywamy $H_{L^{2,d}}$-ciągłe odwzorowanie

$$X : [0, S] \times [0, T] \to \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$$

spełniające równanie (2).

Załóżmy, że $\psi : [0, S] \times [0, T] \to \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$ spełnia warunek:

(A5) ψ jest $H_{L^{2,d}}$-ciągłe, $(\psi(s, 0) + \psi(0, t)) \ominus \psi(0, 0)$ istnieje oraz

$$\int_{[0,S]\times[0,T]\times\Omega} H^2_{L^{2,d}}\left((\psi(s,0) + \psi(0,t)) \ominus \psi(0,0), \{\Theta\}\right) d\nu_A < \infty,$$

$$\int_{[0,S]\times[0,T]\times\Omega} H^2_{L^{2,d}}\left((\psi(s,0) + \psi(0,t)) \ominus \psi(0,0), \{\Theta\}\right) d\mu_M < \infty.$$

Twierdzenie 4

Załóżmy, że $F, G : [0,S] \times [0,T] \times \Omega \times L^{2,d} \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ *spełniają warunki* (A1)-(A3). *Niech* $\psi : [0,S] \times [0,T] \to \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$ *spełnia założenie* (A5). *Wtedy równanie*

$$\begin{aligned} X(s,t) + \psi(0,0) &= \psi(s,0) + \psi(0,t) \\ &+ \int_{[0,s]\times[0,t]} \hat{F}(u,v,X(u,v))\, dA_{u,v} \\ &+ \int_{[0,s]\times[0,t]} \hat{G}(u,v,X(u,v))\, dM_{u,v} \end{aligned} \tag{2}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie.

Niech

$$F, G : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times L^{2,d} \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d),$$

$$\xi : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d,$$

$$\psi : [0, S] \times [0, T] \to \mathcal{K}_c^b(L^{2,d}).$$

Twierdzenie 5

Załóżmy, że F i G spełniają warunki (A1)–(A3). Niech ξ i ψ spełniają założenie (A4). Załóżmy, że ψ spełnia warunek (A5). Wtedy istnieje rozwiązanie $x : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ inkluzji (1) i rozwiązanie $X : [0, S] \times [0, T] \to \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$ równania (2) oraz

$$x(s,t) \in X(s,t) \ \text{ dla każdego } \ (s,t) \in [0, S] \times [0, T].$$

Niech

- $SI(F,G,\xi)$ - zbiór wszystkich rozwiązań inkluzji (1),
- $CS\,(X)$ - zbiór wszytkich ciągłych selekcji odwzorowania

$$X : [0,S] \times [0,T] \to \mathcal{K}_c^b(L^{2,d}),$$

które jest rozwiązaniem równania (2).

Wniosek 1

Przy założeniach Twierdzenia 5 zachodzi warunek

$$CS\,(X) \cap SI\,(F,G,\xi) \neq \emptyset.$$

Niech

$$\mathcal{A}\left(\left(s,t\right),\xi,F,G\right):=\left\{x\left(s,t\right)\in L^{2,d}:x\in SI\left(F,G,\xi\right)\right\}$$

dla $(s,t)\in[0,S]\times[0,T]$.

Wniosek 2

Niech założenia Twierdzenia 5 będą spełnione. Załóżmy, że $X:[0,S]\times[0,T]\to\mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2). Wtedy

$$\mathcal{A}\left(\left(s,t\right),\xi,F,G\right)\cap X\left(s,t\right)\neq\emptyset$$

dla każdego $(s,t)\in[0,S]\times[0,T]$.

Przykład 1

Rozważmy stochastyczne równanie całkowe

$$x(s,t) + \xi(0,0) - \xi(s,0) - \xi(0,t)$$

$$= \int_{[0,s]\times[0,t]} f\left(u, v, \mathbb{E}\left(x(u,v)\right), \|x(u,v)\|_{L^{2,d}}\right) dA_{u,v}$$

$$+ \int_{[0,s]\times[0,t]} g\left(u, v, \mathbb{E}\left(x(u,v)\right), \|x(u,v)\|_{L^{2,d}}\right) dM_{u,v}.$$

Przykład 1 c.d.

Niech $F_1, G_1 : [0,S] \times [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$. *Rozważmy*

$$\begin{cases} \Delta_{s,t}^{s',t'}(x) \in \int\limits_{[s,s']\times[t,t']} F_1\left(u,v,\mathbb{E}\left(x\left(u,v\right)\right),\left\|x\left(u,v\right)\right\|_{L^{2,d}}\right) dA_{u,v} \\ \qquad + \int\limits_{[s,s']\times[t,t']} G_1\left(u,v,\mathbb{E}\left(x\left(u,v\right)\right),\left\|x\left(u,v\right)\right\|_{L^{2,d}}\right) dM_{u,v} \\ x(0,t) = \xi(0,t) \\ x(s,0) = \xi(s,0) \end{cases}.$$

Przykład 1 c.d.

Zdefiniujmy $F, G : [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times L^{2,d} \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ *następująco*

$$F(s, t, \omega, \eta) := F_1\left(s, t, \omega, \mathbb{E}(\eta), \|\eta\|_{L^{2,d}}\right)$$

oraz

$$G(s, t, \omega, \eta) := G_1\left(s, t, \omega, \mathbb{E}(\eta), \|\eta\|_{L^{2,d}}\right)$$

dla $(s, t, \omega, \eta) \in [0, S] \times [0, T] \times \Omega \times L^{2,d}$.

Przykład 1 c.d.

Zdefiniujmy $\hat{F}, \hat{G} : [0,S] \times [0,T] \times \Omega \times \mathcal{K}_c^b(L^{2,d}) \to \mathcal{K}_c^b(\mathbb{R}^d)$ *następująco*

$$\hat{F}\left(s,t,\omega,B\right) := \overline{co}\Big(\bigcup_{\eta\in B} F_1\left(s,t,\omega,\mathbb{E}\left(\eta\right),\|\eta\|_{L^{2,d}}\right)\Big)$$

oraz

$$\hat{G}\left(s,t,\omega,B\right) := \overline{co}\Big(\bigcup_{\eta\in B} G_1\left(s,t,\omega,\mathbb{E}\left(\eta\right),\|\eta\|_{L^{2,d}}\right)\Big)$$

dla $(s,t,\omega,B) \in [0,S] \times [0,T] \times \Omega \times \mathcal{K}_c^b(L^{2,d})$.

Literatura

[1] Cairoli R., Walsh J.B., Stochastic integrals in the plane, *Acta Math.* 134, 1975, 111–183.

[2] Michta M., On set-valued stochastic integrals and fuzzy stochastic equations, *Fuzzy Sets and Systems* 177, 2011, 1–19.

[3] M. Michta, K.Ł. Świątek, Set-Valued Stochastic Integrals and Equations with Respect to Two-Parameter Martingales, *Stoch. Anal. Appl.* 33, 2015, 40–66.

[4] M. Michta, K.Ł. Świątek, Two-parameter fuzzy-valued stochastic integrals and equations, *Stochastic Anal. Appl.* 33, 2015, 1115–1148.

[5] M. Kozaryn, M. Michta, K.Ł. Świątek, Stochastic inclusions driven by two-parameter martingales, *Dynam. Systems Appl.* 25, 2016, 123–152.