Asymptotyka błądzenia losowego w czasie ciągłym

Władysław Szczotka
(Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski)

Czterdziesta piąta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki
Zakopane 2016

W referacie przedstawię pewną metodę badania asymptotyki rozkładu losowej liczby zmiennych losowych i zilustruję ją na przykładzie błądzenia losowego z czasem ciągłym.

1 Metoda badania asymptotyki losowej liczby składnków

Proces błądzenia losowego w czasie ciągłym (CTRW) ma postać

$$R(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j, \quad t \geq 0,$$

gdzie $\{Y_j\}$ jest stacjonarnym ciągiem zmiennych losowych,

$\{N(t)\}$ jest procesem liczącym punkty, tj.

$$N(t) = \max\{k : T_1 + T_2 + \cdots + T_k \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

w którym $\{T_j\}$ jest ciągiem nieujemnych zmiennych losowych.

Problem: Zbadać asymptotykę rozkładu $R(t)$ przy $t \to \infty$.

Metoda badania asymptotyki $R(t)$ jest oparta na transformacji czasu. Metodę tę podaję w następujących dwóch przypadkach:

1. $N(nt)/n \xrightarrow{p} \mu t, \quad \mu$ stała,

2. poza tym.

Pierwszy przypadek dotyczy sytuacji, gdy ciąg $\{T_j\}$ spełnia prawo wielkich liczb i wtedy mamy następujace, dobrze znane twierdzenie.

Twierdzenie 1 *Jeżeli*

$$(1) \qquad \bar{Y}_n(t) \stackrel{df}{=} \frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{[nt]} Y_j \Rightarrow \bar{Y}(t) \quad \textit{w topologii } J_1 \textit{ Skorochoda}$$

$$(2) \qquad \nu_n(t) \stackrel{df}{=} N(nt)/n \xrightarrow{p} \mu t \equiv \nu(t),$$

to $\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{N(nt)} Y_j \Rightarrow \bar{Y}(\nu(t))$*, w topologi* J_1 *Skorochoda.*

Dowód twierdzenia jest oparty na następujących faktach:
- $\frac{1}{a_n}R(nt) = \bar{Y}_n(\nu_n(t)) = \bar{Y}_n \circ \nu_n(t)$,
- transformacja $\tau(x,\nu) = x \circ \nu$, jest ciągła w topologii J_1 Skorochoda na $D[0,\infty) \times C[0,\infty)_{u,\uparrow}$ (zob. Whitt, Tw 13.2.2., str. 430)
- Twierdzenie o zachowaniu się słabej zbieżności przy przekształceniach ciągłych.

W powyższym twierdzeniu ν_n może być dowolnym takim, że

$$\nu_n(t) \xrightarrow{p} \mu t \equiv \nu(t).$$

W referacie przedstawię metodę, pochodzącą od B.I. Henry, P. Straka, z pracy [3], do badania asymptotyki procesu $R(t)$ w przypadku drugim. Metoda ta oparta jest na założeniu zbieżności

$$(3) \qquad (\bar{Y}_n(t), \bar{T}_n(t)) \stackrel{df}{=} (\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{[nt]} Y_j, \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{[nt]} T_j) \Rightarrow (\bar{Y}(t), \bar{T}(t)),$$

w topologii J_1 Skorochoda, gdzie $(\bar{Y}, \bar{T})$ jest dwuwymiarowym procesem Leviego nie będącym złożonym procesem Poissona.

Zauważmy, warunki (1)-(2) Twierdzenia 1 implikują zbieżność

$$(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) \Rightarrow (\bar{Y}, \nu).$$

Chcemy, aby

$$\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{N(nt)} Y_j \Rightarrow \bar{Y}(\nu(t)), \qquad \nu(t) = ????$$

Przyjmijmy następujace definicje i oznaczenia.

$D = D[0,\infty)$ przestrzeń funkcji rzeczywistych na $[0,\infty)$ prawostronnie ciągłych z granicami lewostronnymi. Rozważamy ją w topologii J_1 Skorochoda,
D_u podprzestrzeń D funkcji nieujemnych nieograniczonych ,
$D_{u,\uparrow}$ podprzestrzeń D_u funkcji niemalejących,
$D_{u,\uparrow,\uparrow}$ podprzestrzeń $D_{u,\uparrow}$ funkcji ściśle rosnących.
Dla $x \in D$ definiujemy x^- jako lewostronną wersję x, tj.

$$x^-(t) = \begin{cases} x(t), & \text{gdy } x(t-) = x(t); \\ x(t-), & \text{gdy } x(t-) \neq x(t). \end{cases}$$

Dla x^- definujemy x^+ jako prawostronną wersję x^-, tj.

$$x^+(t) = \begin{cases} x^-(t), & \text{gdy } x^-(t) = x^-(t+); \\ x(t+), & \text{gdy } x^-(t) \neq x^-(t+). \end{cases}$$

Ponadto niech

$$x^{-1}(t) \stackrel{df}{=} \inf\{s : x(s) > t\}, \quad \text{dla } x \in D_{u,\uparrow}.$$

Przekształcenie to nie jest ciągłe w topologii J_1 Skorochoda.
Dla elementów

$$z = (x,y), \quad \text{gdzie} \quad x \in D,\ y \in D_{u,\uparrow},$$

definiujmy przekształcenia

$$\ell_z = y^{-1},$$

$$\Phi(z) = (z^- \circ \ell_z^-)^+ = \left(x^- \circ \ell_z^-, y^- \circ \ell_z^-\right)^+, \qquad \Psi(z) = z \circ \ell_z.$$

Twierdzenie 2 *(B.J.Henry, P.Straka). Przekształcenia Φ i Ψ są ciągłe na zbiorze funkcji $z = (x,y)$, gdzie $x \in D,\ y \in D_{u,\uparrow\uparrow}$.*

Twierdzenie 3 *(W.Szczotka, P.Żebrowski). Przekształcenia*

$$y \mapsto y \circ y^{-1} \qquad \text{oraz} \quad y \mapsto (y \circ y^{-1})^{-1}$$

są ciągłe na $D_{u,\uparrow}$.

2 Ilustracja metody na przykładzie procesów CTRW

Niech

$$\{(Y_{n,j}, T_{n,j}) = (\frac{1}{a_n} Y_j, \frac{1}{b_n} T_j),\ j \geq 1, n \geq 1\}.$$

$$\bar{Y}_n(t) = \sum_{j=1}^{[nt]} Y_{n,j}, \qquad \bar{T}_n(t) = \sum_{j=1}^{[nt]} T_{n,j},$$

$$N_n(t) = \max\{k : T_{n,1} + \cdots T_{n,k} \leq t\}$$

$$(\hat{Y}_n(t), \hat{T}_n(t)) \stackrel{df}{=} (\sum_{j=1}^{N_n(t)} Y_{n,j}, \sum_{j=1}^{N_n(t)} T_{n,j})$$

$$(\tilde{Y}_n(t), \tilde{T}_n(t)) \stackrel{df}{=} (\sum_{j=1}^{N_n(t)+1} Y_{n,j}, \sum_{j=1}^{N_n(t)+1} T_{n,j})$$

Lemat 1

$$\Phi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) = (\hat{Y}_n, \hat{T}_n), \qquad \Psi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) = (\tilde{Y}_n, \tilde{T}_n).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$n\bar{T}_n^{-1}(t) = n \inf\{s : \zeta_n(s) > t\} = \inf\{ns : \sum_{j=1}^{[ns]} T_{n,j} > t\}$$

$$= \inf\{k : \sum_{j=1}^{k} T_{n,j} > t\} = N_n(t) + 1.$$

Stąd

$$n\bar{T}_n^{-1}(t-) = N_n(t-) + 1.$$

Ponieważ

$$\bar{Y}_n^{-}(t) = \bar{Y}_n(t-) = \sum_{j=1}^{[nt-1]} Y_{n,j},$$

wiec

$$\Phi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n)(t-) = (\bar{Y}_n^{-} \circ (\bar{T}_n^{-})^{-1}, (\bar{T}_n^{-})^{-1})(t)$$

$$= (\sum_{j=1}^{N_n(t-)} Y_{n,j}, \sum_{j=1}^{N_n(t-)} T_{n,j}) = (\hat{Y}_n(t-), \hat{T}_n(t-)).$$

Zatem

$$\big(\Phi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n)(t-)\big)^+ = (\hat{Y}_n(t), \hat{T}_n(t)) = (\sum_{j=1}^{N_n(t)} Y_{n,j}, \sum_{j=1}^{N_n(t)} T_{n,j}).$$

Twierdzenie 4 *Jeżeli zachodzi zbieżność (3), tj.*

$$(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) \Rightarrow (\bar{Y}, \bar{T}) \tag{4}$$

oraz prawie wszystkie realizacjie $\bar{T}$ są ściśle rosnące i nieujemne, to

$$\Phi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) \Rightarrow \Phi(\bar{Y}, \bar{T})$$

oraz

$$\Psi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) \Rightarrow \Psi(\bar{Y}, \bar{T}),$$

gdzie

$$\Phi(\bar{Y}, \bar{T}) = (\bar{Y}^- \circ (\bar{T}^{-1})^-)^+, ((\bar{T}^{-1})^-)^+) = ((\bar{Y}^- \circ \bar{T}^{-1})^+, \bar{T}^{-1}),$$

$$\Psi(\bar{Y}, \bar{T}) = (\bar{Y} \circ \bar{T}^{-1}, \bar{T}^{-1}).$$

Lemat 2 *Jeżeli*

$$P(disc(\bar{Y}) \cap disc(\bar{T}) = \emptyset) = 1,$$

to

$$\Phi(\bar{Y}, \bar{T}) = \Psi(\bar{Y}, \bar{T}).$$

Podstawowym założeniem prezentowanej metody jest zbieżność (4) oraz założenie, że prawie wszystkie realizacje procesu granicznego $\bar{T}$ są ściśle rosnące i nieograniczone.

• Jeżeli dla każdego n ciągi $\{Y_{n,j}\}$ i $\{T_{n,j}\}$ są wzajemnie niezależne, to założenie zbieżności (4), tj. $(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) \Rightarrow (\bar{Y}, \bar{T})$ sprowadza się do

$$\bar{Y}_n \Rightarrow \bar{Y} \quad \text{oraz} \quad \bar{T}_n \Rightarrow \bar{T} \tag{5}$$

• Jeżeli dla każdego n ciągi $\{Y_{n,j}\}$ i $\{T_{n,j}\}$ są wzajemnie niezależne oraz każdy z nich jest ciągiem iid, wtedy pokazanie zbieżności (5) sprowadza się do pokazania, że każdy z tych ciągów jest zbieżny do procesu Leviego oraz, np. $\bar{T}$ jest α-stabilnym procesem Leviego z $0 < \alpha < 1$.

W wielu sytuacjach ciągi $\{Y_{n,j}\}$ i $\{T_{n,j}\}$ mogą być zależne jak również zmienne losowe w tych ciągach nie muszą być iid.
W pracy [5] rozważamy następujące dwie sytuacje.

• W pierwszej sytuacji przyjmujemy że $\{Y_j\}$ i $\{T_j\}$ są wzajemnie niezależne i $\{T_j\}$ jest tworzony w specyficzny sposób. Mianowicie,

$$T_j = Z_{X_j}, \quad j \geq 1,$$

gdzie $\{Z_j, -\infty < j < \infty\}$ jest ciągiem nieujemnych zmiennych losowych, iid,
natomiast $\{X_n\}$ jest błądzeniem losowym na liczbach całkowitych, tj.

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad n \geq 1,$$

gdzie $\{\xi_j, j \geq 1\}$ jest ciagiem zmiennych losowych iid, całkowitoliczbowych i $E\xi_j = 0$.

• W drugiej sytuacji przyjmujemy, że

$$Y_j = \xi_j, \quad j \geq 1.$$

3 Zastosowanie metody do CTRW z specyficznym ciagiem $\{T_j\}$

3.1 Założenia

A1: $\{\xi_i, i \geq 0\}$ iid zm.los. o wartościach w $J = \{... - 1, 0, 1, ...\}$, $E\xi_i = 0$.
$\{X_n, n \geq 0\}$ błądzenie losowe na J tj. $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, n \geq 1$.

$$\bar{X}_n(t) \overset{df}{=} \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k \Rightarrow \bar{X}(t), \tag{6}$$

$\bar{X}$ stabilny proces Leviego z parametrem α, $1 < \alpha \leq 2$;

A2: $\{Z_i, -\infty < i < \infty\}$ ciąg iid, $Z_i \geq 0$

$$\bar{Z}_{1,n}(t) \overset{df}{=} \frac{1}{n^{1/\beta}} \sum_{k=1}^{[nt]} Z_k \Rightarrow \bar{Z}_1(t), \tag{7}$$

$\bar{Z}_1$ stabilny proces Leviego z parametrem β, $0 < \beta < 1$;

A3: Procesy $\{\xi_n\}$ i $\{Z_n\}$ są wzajemnie niezależne;

A4: $\{Y_n, n \geq 1\}$ ciąg iid

$$\bar{Y}_n(t) \overset{df}{=} \frac{1}{n^{1/\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} Y_k \Rightarrow \bar{Y}(t) \tag{8}$$

$\bar{Y}$ stabilny proces Leviego z parametrem γ, $0 < \gamma \leq 2$.

3.2 Definicja T_k

Niech

$$T_k = Z_{X_k}, \quad k \geq 1,$$
$$N(t) = \max\{k : T_1 + \cdots + T_k \leq t\}.$$

Problem I. Znaleźć asymptotykę procesu $R(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$.

problem II. Znaleźć asymptotykę procesu $R(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \xi_j$.

3.3 Definicje procesów

Niech

$$\bar{Z}_{1,n}(x) \stackrel{df}{=} \frac{1}{n^{1/(\alpha\beta)}} \sum_{j=1}^{[n^{1/\alpha}x]} Z_j, \qquad \bar{Z}_{2,n}(x) \stackrel{df}{=} \frac{1}{n^{1/(\alpha\beta)}} \sum_{j=1}^{[n^{1/\alpha}x]} Z_{-j} \quad x \geq 0, \quad n \geq 1;$$

$$Z_n(x) \stackrel{df}{=} \bar{Z}_{1,n}(x)I(x \geq 0) + \bar{Z}_{2,n}(-x)I(x < 0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Uwaga 1 *Przy założeniu A2 zachodzi zbieżność*

$$(\bar{Z}_{1,n}, \bar{Z}_{2,n}) \Rightarrow (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) \tag{9}$$

w $(D[0,\infty) \times D[0,\infty))$ *z topologią produktową* J_1 *z* $D[0,\infty)$, *gdzie* $\tilde{Z}_1$ *i* $\tilde{Z}_2$ *są wzajemnie niezależnymi* β*-stabilnymi procesami Leviego.*

Niech

$$N(n,i) = \sum_{k=0}^{n} I(X_k = i), \quad n \geq 1, i \in J,$$

$$\ell_n(t,x) \stackrel{df}{=} \frac{1}{n^{1-1/\alpha}} N([nt], [xn^{1/\alpha}]), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

$\{\ell_n(t,x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ jest procesem czasu lokalnego dla procesu $\bar{X}_n$.

Niech

$$\bar{T}_n(t) \stackrel{df}{=} \frac{1}{n^\delta} \sum_{j=1}^{[nt]} T_j, \quad t \geq 0, n \geq 1,$$

$$\delta \stackrel{df}{=} 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Wykorzystując definicję $T_k = Z_{X_k}, \quad k \geq 1$ otrzymujemy równość

$$\sum_{j=1}^{n} T_j = \sum_{i \in J} Z_i N(n,i),$$

Stąd

$$\bar{T}_n(t) = \frac{1}{n^\delta} \sum_{i \in J} Z_i N([nt], i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_n(t,x) Z_n(dx) \tag{10}$$

gdzie $\{\ell_n(t,x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ jest procesem czasu lokalnego dla procesu $\bar{X}_n$.

Z Twierdzenia 2.3 w [2] (Borodin1981) i Twierdzenia 1.1 w [4] (Kesten) mamy następujący fakt.

Uwaga 2 *Przy założeniach A1 , A2 i A3 zachodzi zbieżność*

$$\bar{T}_n \Rightarrow \bar{T}, \tag{11}$$

gdzie

$$\bar{T}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(t,x) Z(dx), \quad t \geq 0. \tag{12}$$

$\{\ell(t,x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ *jest procesem czasu lokalnego dla procesu* $\bar{X}$, *natomiast*

$$Z(x) = \bar{Z}_1(x) I(x \geq 0) + \bar{Z}_2(-x) I(x < 0), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Proces $\bar{T}$ *ma prawie wszystkie ciągłe realizacje, przyrosty stacjonarne oraz jest* δ*-samopodobnym.*

Twierdzenie 5 *Przy założeniach A1, A2, A4 oraz założeniu, że procesy* $\{Y_n\}$, $\{\xi_n\}$ *i* $\{Z_n\}$ *są wzajemnie niezależne, mamy słabą zbieżność*

$$R_n \Rightarrow \left(\bar{Y}^- \circ (\bar{T}^{-1})^-\right)^+ \equiv \left(\bar{Y}^-(\bar{T}^{-1})\right)^+, \tag{14}$$

gdzie

$$R_n(t) = \frac{1}{n^{1/\gamma}} \sum_{j=1}^{N(n^\delta t)} Y_j, \quad t \geq 0, \ n \geq 1.$$

Dowód. Ponieważ procesy $\bar{T}_n$ oraz $\bar{Y}_n$ są wzajemnie niezależne oraz $\bar{T}_n \Rightarrow \bar{T}$, $\bar{Y}_n \Rightarrow \bar{Y}$, gdzie $\bar{Y}$ jest γ- stabilnym procesem Leviego, więc

$$(\bar{Y}_n, \bar{T}_n,) \Rightarrow (\bar{Y}, \bar{T}). \tag{15}$$

Zauważmy, że

$$R_n(t) = \frac{1}{n^{1/\gamma}} \sum_{j=1}^{N(n^\delta t)} Y_j = \bar{Y}_n(\frac{N(n^\delta t)}{n})$$

oraz

$$\bar{T}_n^{-1}(t) = \inf\{s > 0 : \tilde{T}_n(s) > t\} = \inf\{s > 0 : \frac{1}{n^\delta}\sum_{k=1}^{[ns]} T_k > t\}$$

$$= \inf\{s > 0 : \sum_{k=1}^{[ns]} T_k > n^\delta t\} = \frac{1}{n}(N(n^\delta t) + 1) = \frac{1}{n}N(n^\delta t) + \frac{1}{n}.$$

Stąd

$$\bar{Y}_n\left(\frac{N(n^\delta t)}{n}\right) = \bar{Y}_n\left(\bar{T}_n^{-1}(t) - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \left(\bar{Y}_n^- \circ (\bar{T}_n^{-1})^-\right)^+(t),$$

Ponieważ

$$R_n = \Phi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n),$$

oraz Φ jest ciągła w topologi J_1 w punktach (x, y) takich, że y jest ściśle rosnąca, wiec korzystając z tego,że proces $\bar{T}$ ma realizacje nieograniczone, ciągłe i ściśle rosnące oraz z Twierdzenia 2 lub 4 (lub z Proposition 2.3 z [3]) i Twierdzenia 5.1 w [1], otrzymujemy zbieżność

$$R_n = \Phi(\bar{Y}_n, \bar{T}_n) \Rightarrow \Phi(\bar{Y}, \bar{T}).$$

Ponieważ proces $\bar{T}$ ma realizacje nieograniczone i ściśle rosnące, więc również tę własność ma proces $\bar{T}^{-1}$ i ponadto z prawdopodobieństwem jeden ma ciągłe realizacje
Stąd

$$\Phi(\bar{Y}, \bar{T})(t) = \left(\bar{Y}^- \circ (\bar{T}^{-1})^-\right)^+(t) = \left(\bar{Y}^- \circ \bar{T}^{-1}\right)^+(t)$$
$$= \bar{Y}^-(\bar{T}^{-1}(t))^+.$$

W przypadku, gdy $Y_i = \xi_i$ rozważamy procesy

$$R_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{N(n^\delta t)} \xi_k.$$

Twierdzenie 6 *Przy założeniach A1 A2 i A3 zachodzi słaba zbieżność*

$$R_n \Rightarrow (\bar{X}^- \circ (\bar{T}^{-1})^-)^+ = (\bar{X}^- \circ \bar{T}^{-1})^+.$$

Literatura

[1] Billingsley, P. (1968) *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.

[2] , A.N.Borodin (1981), On the Asymptotic behaviour of local times of recurrent random walks with finite variance, Theory of Probability and its Applications XXIX, Number 2,

[3] B.I. Henry, P. Straka, *Lagging/leading Coupled Continuous Time Random Walks, Renewal Times and Their Joint Limits*,

[4] Kesten, H and Spitzer F, (1970), A limit Theorem Related to a New Class of Self Similar Processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verv. Gebiete, 50, 5-25

[5] Marcin Magdziarz, Władyslaw Szczotka, Quenched trap model for Levy flights, Commun Nonlinear Sci. Numer Simulat 30(2016) 5–14