*dr Anna Denkowska*
*Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Katedra Matematyki*

# Własność UPC i nierówność Markowa z parametrem

Andriej Andriejewicz Markow udowodnił w 1889 r., że dla każdego wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]$ jednej zmiennej zachodzi nierówność $\sup_{x\in[-1,1]} |p'(x)| \leqslant (\deg p)^2 \sup_{x\in[-1,1]} |p(x)|$, uogólniając podobną nierówność otrzymaną przez chemika Dymitra Mendelejewa dla wielomianów stopnia drugiego, potrzebną mu w badaniach nad ciężarem właściwym roztworu w zależności od stężenia rozpuszczanej substancji. Nieco później brat Andrieja, Władimir Markow poszerzył tę nierówność na dalsze pochodne $p^{(k)}$. Nierówność ta odgrywa bardzo istotną rolę zarówno w teorii aproksymacji, jak i w różnych zagadnieniach matematyczno-fizycznych. Z tego też względu próbowano przenieść tę nierówność na przypadek wielomianów $n$ zmiennych i zwarte podzbiory $E \subset \mathbb{R}^n$. I tak, każdy zwarty, wypukły i tłusty (tj. równy domknięciu swojego wnętrza) zbiór ma własność Markowa, ale zbiór z ostrzem $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1],\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-1/x}\} \cup \{(0,0)\}$ już nie.

Dzięki przełomowym wynikom W. Pawłuckiego i W. Pleśniaka z lat 80. wiadomo, że nierówność Markowa spełniona jest na zbiorach z jednostajnymi ostrzami wielomianowymi (*uniformly polynomially cuspidal* czyli UPC), których szeroką klasę przykładów stanowią zwarte i tłuste zbiory subanalityczne. Przypomnijmy w tym miejscu, że podzbiór $\mathbb{R}^n$ zwie się subanalitycznym, gdy lokalnie (w $\mathbb{R}^n$) daje się zapisać jako rzut ograniczonego zbioru semi-analitycznego z poszerzonej przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, czyli takiego, który lokalnie opisany jest za pomocą skończenie wielu równań i nierówności analitycznych. Zbiór $E \subset \mathbb{R}^n$ posiada własność UPC z parametrami $M, m > 0$ i $d \in \mathbb{N}$ (co zapisujemy $E \in UPC(M,m,d)$), gdy dla dowolnego $x \in \overline{E}$ istnieje odwzorowanie wielomianowe $h_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stopnia nie większego niż $d$ i czyniące zadość warunkom:

1. $h_x(0) = x,\ h_x((0,1]) \subset E$;
2. $\operatorname{dist}(h_x(t), \mathbb{R}^n \setminus E) \geqslant Mt^m,\ t \in [0,1],\ x \in \overline{E}$.

We współpracy z drem Maciejem Denkowskim z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego podjęliśmy badania nad własnością UPC oraz nierównością Markowa z parametrem. Dla $E \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}^k$ oznaczamy $E_t := \{x \in \mathbb{R}^n \colon (t,x) \in E\}$ oraz $\pi(t,x) = x$. Naszym głównym wynikiem jest podane niżej twierdzenie wraz z wnioskiem:

**Twierdzenie**. *Niech $E \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ będzie otwartym i ograniczonym zbiorem subanalitycznym. Wówczas istnieje funkcja o wykresie subanalitycznym $M \colon \pi(E) \to (0,+\infty)$ oraz stałe $m > 0$, $d \in \mathbb{N}$, przy których dla dowolnego $t \in \pi(E)$, $E_t \in UPC(M(t), m, d)$.*

Stałej $M(t)$ na ogół nie można uniezależnić od parametru, o czym się łatwo przekonać na przykładzie zbioru $E = \{(t, x_1, x_2) \in (0,1)^3 \colon x_1^2 < t^2 x_2^3\}$.

**Wniosek**. *W podanej sytuacji istnieje taka stała $r > 0$, że dla dowolnego wielomianu $p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stopnia $\leqslant k$ oraz dla dowolnego wielowskaźnika $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mamy*

$$\left\| \frac{\partial^\alpha p}{\partial x^\alpha} \right\|_{E_t} \leqslant C(t,E,\alpha) k^{r|\alpha|} \|p\|_{E_t},\ t \in \pi(E),$$

*gdzie stała $C(t,E,\alpha) > 0$ zależy od parametru $t$, zbioru $E$ i $\alpha$, a norma jest zdefiniowana jako $||p||_E = \sup\{|p(x)| \colon x \in E\}$.*