Rafał Nowak
Uniwersytet Wrocławski, Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Informatyki

Przyspieszanie zbieżności szeregów naprzemiennych

Komunikat dotyczy przyspieszania zbieżności pewnej szerokiej rodziny szeregów naprzemiennych

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n.$$

Ściślej,

- przedstawimy nową metodę służącą do tego celu,
- pokażemy jej pewne własności, analogiczne do tych, które mają klasyczne metody Levina i Wenigera (z parametrami zaproponowanymi przez Forda i Sidiego),
- zwrócimy uwagę zarówno na podobieństwa, jak i na różnice między tymi trzema metodami.

Rodzina szeregów, dla których rozważa się wspomniane metody, jest z definicji taka, że wielkości $\beta_n := \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ mają następującą reprezentację asymptotyczną (przy $n \to \infty$):

$$\beta_n \sim x\Big[1 + \sum_{j=r}^{\infty} h_j n^{-j/r}\Big], \qquad x \in (0,1],\ r \in \mathbb{N}.$$

Powyższy warunek jest spełniony, gdy

$$\alpha_n \sim x^n n^v \sum_{j=0}^{\infty} g_j n^{-j/r}, \qquad n \to \infty.$$

Na przykład, dla $r = 1$ mamy do czynienia z szeregiem hipergeometrycznym

$${}_{p+1}F_p(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1};\, b_1, b_2, \ldots, b_p; -x)$$

o parametrach, które zapewniają jego naprzemienność.

Nowa metoda, podobnie jak wspomniane metody Levina i Wenigera, konstruuje dwuwymiarową tablicę przybliżeń $s_n^{(k)}$, w której jest jednak inny schemat obliczeń — zbędne są wzory rekurencyjne dla liczników i mianowników przybliżeń. Koszt pamięciowy jest zatem znacznie niższy, podczas gdy, jak wykazano, różnice $\Delta s_n^{(k)}$ spełniają

$$(-1)^{n+k+1}\Delta s_n^{(k)}/\alpha_{n+1} = \mathcal{O}(n^{-2k}),$$

co odpowiada przybliżeniom uzyskiwanym przez klasyczne metody.