dr hab. Jan Koroński
Politechnika Krakowska, Wydział Fizyki Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

O problemie Cauchy'ego z warunkiem nielokalnym dla nieskończeniewymiarowego równania parabolicznego

Rozważamy następujące równanie różniczkowe

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} D^2_{x_i} - D_t\Big)u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(x_i,t), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in R^\infty \tag{1}$$

w obszarze $D = \{(x,t) : x_i \in (-\infty, \infty),\ i = 1, 2, \dots,\ t \in (0,T)\}$, z warunkiem nielokalnym

$$u(x,0) + \prod_{i=1}^{\infty} g_i\Big(x_i, \sum_{j=1}^{r} u(x_i + T_j)\Big) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i),$$
$$x_i \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\dots,\ 0 < T_1 < \dots < T_r \leqslant T. \tag{2}$$

Do konstrukcji rozwiązania problemu (1)–(2) stosujemy odpowiednie jądra będące rozwiązaniami podstawowymi równań

$$(D^2_{x_i} - D_t)U_i(x_i,t;y_i,s) = 0, \quad i = 1,2,\dots,$$

gdzie

$$U_i(x_i,t;y_i,s) = A(t-s)^{-1/2}\exp(B(t,s)(x_i-y_i)^2),$$
$$A = (2\sqrt{\pi})^{-1}, \quad B(t,s) = (-4(t-s))^{-1}.$$

W pracy [1] podane jest rozwiązanie dla jednorodnego, a w pracy [2] dla niejednorodnego lokalnego zagadnienia Cauchy'ego dla rozważanego równania nieskończeniewymiarowego, które można zapisać w następującej jawnej postaci:

$$u(x,t) = A_\infty \int_{R^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} h_i(y_i) U_i(x_i,t;y_i,0)\,dy_i$$
$$+ \int_0^t \int_{R^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} f_i(y_i,s) U_i(x_i,t;y_i,s)\,dy_i\,ds, \quad x = (x_1,x_2,\dots) \in R^\infty,\ t \in (0,T).$$

Funkcje $h_i : R \to R$ są takie, że $\prod_{i=1}^{\infty} h_i(y_i) < \infty$ dla $y_i \in (-\infty,\infty)$ oraz są ciągłe i ograniczone na R. Funkcje $g_i : R \to R$ mają takie same własności jak funkcje h_i. Funkcje $f_i : D_1 \to R$, $D_1 = (-\infty,\infty) \times (0,T)$ są takie, że:

1. $f_i \in C^{1,0}(D_1)$, $i = 1,2,3,\dots$
2. $D^j_{y_i} f_i(-\infty,s) = D^j_{y_i} f_i(\infty,s) = 0$, $s \in (0,T)$, $j = 0,1,2$, $i = 1,2,3,\dots$
3. $D^j_{y_i} \prod_{i=1}^{\infty} f_i(y_i,t)$ jest zbieżny dla $y_i(-\infty,\infty)$, $j = 0,1,2$.
4. $D_t \prod_{i=1}^{\infty} f_i(y_i,t)$ jest zbieżny dla $y_i(-\infty,\infty)$.
5. comp.supp $f_i \subset (-\infty, \infty \in [0,T]$.

Literatura

[1] J. Koroński, *Parabolic problem in the space R^∞*, Commentationes Mathematicae XLIV (2004), 93–98.
[2] J. Koroński, *Nonhomogeneous parabolic problem in the space R^∞*, Fasciculi Mathematici XXXVIII (2007), 41–45.