Maciej Sablik
Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach

Kilka uwag o pewnym problemie z Amer. Math. Monthly

Roman Ger (por. [3]) zwrócił nam uwagę na pracę [2], w której autorzy zadają następujące pytania:

Pytanie 1. Które funkcje różniczkowalne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'\left(\frac{a + b}{2}\right) \tag{1}$$

dla wszelkich $b > a$?

Pytanie 2. Ustalmy $\lambda \in (0, 1)$. Które funkcje różniczkowalne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\lambda a + (1 - \lambda)b) \tag{2}$$

dla wszelkich $b > a$?

Carter i Lowry-Duda dowodzą następującego twierdzenia w [2]:

Twierdzenie. *Niech $\lambda \in (0, 1)$ będzie ustalone. Załóżmy, że (różniczkowalna) funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\lambda a + (1 - \lambda)b)$$

dla wszelkich $a < b$. Wówczas f jest wielomianem kwadratowym. Jeśli $\lambda \neq \frac{1}{2}$, to f jest wielomianem liniowym.

W dowodzie autorzy używają **potrójnej** różniczkowalności f. Wiadomo, przynajmniej od czasu wyniku J. Aczéla (por. [1]), że nie potrzeba **żadnych założeń o regularności** do rozwiązania nawet bardziej ogólnego równania od (1). Istotnie, Aczél udowodnił, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g(a + b), \tag{3}$$

ma jedyne rozwiązanie (f, g). Rozwiązanie to jest postaci

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \tag{4}$$
$$g(x) = \alpha x + \beta \tag{5}$$

dla pewnych stałych α, β i γ.

W naszym wystąpieniu dowodzimy następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Niech f, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami i niech $\lambda \in (0, 1)$. Wówczas para (f, g) jest rozwiązaniem równania*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g(\lambda a + (1 - \lambda)b)$$

dla wszystkich $a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy f i g są dane wzorami odpowiednio (4) oraz (5). W szczególności, $g = f'$.

Bibliografia

[1] J. Aczél, *A mean value property of the derivative of quadratic polynomials — without mean values and derivatives*, Math. Magazine 58 (1985), 42–45.

[2] P. Carter, D. Lowry-Duda, *On functions whose mean value abscissas are midpoints, with connections to harmonic functions*, Amer. Math. Monthly 124 (2017), 535-–542.

[3] R. Ger, Uwaga, Katowice 2017.