dr hab. inż. Kamil Urbanowicz
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Mechatroniki
E-mail: `kamil.urbanowicz@zut.edu.pl`
dr hab. inż. Adam Deptuła
Politechnika Opolska, Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki
E-mail: `a.deptula@po.edu.pl`
dr hab. inż. Michał Stosiak
Politechnika Wrocławska, Wydział Mechaniczny
E-mail: `michal.stosiak@pwr.edu.pl`
dr inż. Mykola Karpenko
Vilnius Gediminas Technical University, Faculty of Transport Engineering
E-mail: `mykola.karpenko@vilniustech.lt`
dr inż. Anna Deptuła
Politechnika Opolska, Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki
E-mail: `an.deptula@po.edu.pl`

Water hammer — an analytically unsolved problem

Szczególnym rodzajem przepływów niestacjonarnych jest zjawisko uderzenia hydraulicznego. Ma ono miejsce, gdy gwałtownie zblokowany lub odblokowany zostanie przepływ płynu. Występować może więc w dwóch przypadkach: gdy zamknięcie jest zamierzone lub też nie (przypadek awarii zasilania). Początkowe badania realizowane były ponad 120 lat temu m.in. przez Żukowskiego (ojca aerodynamiki) jak i włoskiego badacza Alleviego. Od lat pięćdziesiątych poprzedniego stulecia za sprawą pracy Iberalla [1] zauważona została konieczność poprawnego modelowania naprężenia stycznego odpowiadającego oporom ruchu w tym przepływie. Wtedy też zdefiniowany został układ równań (ciągłości i ruchu):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{2}{R}\tau_w = 0 \\ \tau_w = \tau_{q-s} + \tau_u = \dfrac{f\rho}{8} v|v| + \dfrac{2\mu}{R}\displaystyle\int_0^t w(t-u)\cdot \dfrac{\partial v(u)}{\partial t}\, du \end{cases} \tag{1}$$

gdzie: $p = p(x,t)$ — ciśnienie w przekroju poprzecznym przewodu, x — współrzędna osiowa, t — czas, ρ — gęstość płynącej cieczy, c — prędkość propagacji fali ciśnienia, $v = v(x,t)$ — prędkość przepływu, R – średnica wewnętrzna przewodu, τ_w — naprężenie styczne na ściance, f — współczynnik oporu Darcy–Weisbacha, μ — lepkość dynamiczna cieczy, $w(t-u)$ — funkcja wagi.

Powyższy układ równań stanowi do dnia dzisiejszego podstawę modelowania numerycznego tego typu zjawiska. W latach sześćdziesiątych podjęte zostały próby rozwiązania analitycznego tego układu dla najprostszego praktycznego układu, w którym przepływ tego typu mógłby wystąpić (układ zawór–przewód–zbiornik). Holmboe [2] z pomocą metody operatorowej Laplace'a określił w dziedzinie częstotliwości rozwiązanie ciśnienia, ostatnio [3] dopełniono formalności i podobnie wyznaczono w dziedzinie Laplace'a rozwiązania na prędkość przepływu i naprężenie styczne (2), gdzie: $\square = \rho c v_0$ — przyrost ciśnienia wyznaczany z formuły Żukowskiego, v_0 — prędkość przepływu w ruchu ustalonym poprzedzającym uderzenie, L — długość przewodu, M — dynamiczna funkcja lepkości będąca pierwiastkiem z stosunku zmodyfikowanych funkcji Bessela (3).

$$\begin{cases} \tilde{p}(x,s) = \square \dfrac{M}{s}\Big[e^{-\frac{x}{c}M\cdot s} - e^{-\frac{(2L-x)}{c}M\cdot s} - e^{-\frac{(2L+x)}{c}M\cdot s} \\ \qquad\qquad + e^{-\frac{(4L-x)}{c}M\cdot s} + e^{-\frac{(4L+x)}{c}M\cdot s} - \ldots\Big] + \dfrac{8\mu v_0}{sR^2}x, \\ \tilde{v}(x,s) = -\dfrac{v_0}{s}\Big[e^{-\frac{x}{c}M\cdot s} - e^{-\frac{(2L-x)}{c}M\cdot s} - e^{-\frac{(2L+x)}{c}M\cdot s} \\ \qquad\qquad + e^{-\frac{(4L-x)}{c}M\cdot s} + e^{-\frac{(4L+x)}{c}M\cdot s} - \ldots\Big] + \dfrac{v_0}{s}, \\ \tilde{\tau}(x,s) = \dfrac{Rv_0\rho}{2}\Big[e^{-\frac{x}{c}M\cdot s} - e^{-\frac{(2L-x)}{c}M\cdot s} - e^{-\frac{(2L+x)}{c}M\cdot s} + \ldots\Big](1-M^2) - \dfrac{4\mu v_0}{sR} \end{cases} \tag{2}$$

$$M = \sqrt{I_0\left(\sqrt{s\,\frac{R^2}{\nu}}\right) \Big/ I_2\left(\sqrt{s\,\frac{R^2}{\nu}}\right)} \tag{3}$$

gdzie: I_0 i I_2 — zmodyfikowane funkcje Bessela zerowego i drugiego rzędu, ν — współczynnik lepkości kinematycznej, s — operator Laplace'a. Ze względu na złożoność otrzymanych formuł, w szczególności zagnieżdżenie pierwiastka z funkcji Bessela w argumentach funkcji hiperbolicznych (które rozwinięto w nieskończony szereg ukazany w równaniu (2)) do dnia dzisiejszego nikt nie wyznaczył odwrotnego przekształcenia Laplace'a dla tych rozwiązań, czyli nie określił rozwiązania w dziedzinie czasu (oryginału). Istnieją jedynie pewne uproszczone rozwiązania [4], np. dla relatywnie dużych wartości częstotliwości, czyli relatywnie małych czasów, które nie mogą być stosowane w szerokim zakresie zmienności parametrów przepływu. Przyglądając się rozwiązaniu (2), widzimy, że oryginał oparty będzie na odwrotnych przekształceniach z następujących funkcji:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbb{M}^2\}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{\mathbb{M}\} \quad \text{i} \quad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as\mathbb{M}}\}. \tag{4}$$

Odwrotne przekształcenia dwóch pierwszych funkcji, tj. $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbb{M}^2\}$, i $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbb{M}\}$ są znane za sprawą prac Breretona–Jianga [5] oraz Urbanowicza i in. [6], wciąż jednak nie jest znana postać oryginału z ostatniej funkcji

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\exp\left(-as\sqrt{\left(\sqrt{s\,\frac{R^2}{\nu}}\right) \Big/ I_2\left(\sqrt{s\,\frac{R^2}{\nu}}\right)}\right)\right\}. \tag{5}$$

Znając postacie tych funkcji w dziedzinie czasu, możliwe będzie zdefiniowanie kompletnego rozwiązania analitycznego analizowanego problemu.

Literatura

[1] A. S. Iberall, *Attenuation of oscillatory pressures in instrument lines*, J. Res. Natl Bur. Stand. 45 (1950), 85–108.

[2] E. L. Holmboe, *Viscous distortion in wave propagation as applied to waterhammer and short pulses*, Doctoral Thesis, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, USA, 1964.
[3] K. Urbanowicz, H. Jing, A. Bergant, M. Stosiak, M. Lubecki, *Progress in analytical modeling of water hammer*, in: Proceedings of the ASME 2021, Fluids Engineering Division Summer Meeting, Virtual Conference, August 2021, paper FEDSM2021-65920, 1–12.
[4] T. Muto, K. Takahashi, *Transient responses of fluid lines (Step responses of single pipeline and series pipelines)*, Bull. JSME 28(244) (1985), 2325–2331.
[5] G. J. Brereton, Y. Jiang, *Exact solutions for some fully developed laminar pipe flows undergoing arbitrary unsteadiness*, Phys. Fluids 17 (2005), 118104.
[6] K. Urbanowicz, A. Bergant, R. Grzejda, M. Stosiak, *About inverse Laplace transform of a dynamic viscosity function*, Materials 15(12) (2022), 4364.