*Łukasz Stępień, Paweł Przybyłowicz, Michał Sobieraj*
*Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie*
*Wydział Matematyki Stosowanej*

# Efektywna aproksymacja rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z całkami względem przeliczalnie wymiarowego procesu Wienera oraz punktowej miary Poissona

Niech $T > 0$, $p \geqslant 2$, $d \in \mathbb{N}$, $d' \in \mathbb{N}$ oraz niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z odpowiednio bogatą filtracją.

Rozważmy $d$-wymiarowe SDE postaci

$$\mathrm{d}X(t) = \eta + a(t, X(t))\,\mathrm{d}t + b(t, X(t))\,\mathrm{d}W(t) + \int_{\mathcal{E}} c(t, X(t-), y)\,N(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

gdzie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{d'} \setminus \{0\}$, $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots)$ jest przeliczalnie wymiarowym procesem Wienera, $N(dy, ds)$ jest losową miarą Poissona z odpowiednią intensywnością na $\mathcal{E} \times [0, T]$, oraz $\eta \in L^p(\Omega)$. Zakładamy również, że $N$, $W$ oraz $\eta$ są niezależne między sobą. Ponadto, przy odpowiedniej regularności funkcji $a, b, c$, równanie (1) posiada jedyne rozwiązanie $(X(t))_{t\in[0,T]}$, patrz [1].

Ogólna postać (1) jest umotywowana dynamiką modeli, w których zakładamy skomplikowaną strukturę skoków (nieciągłości trajektorii) oraz zależność rozwiązania od nieskończenie wielu czynników losowych (ang. *risk factors*). W szczególności, nasze wyniki mają zastosowanie w wycenie instrumentów finansowych (uogólniony model MBS), analizie ewolucji środowiska biologicznego (model drapieżnik-ofiara), czy modelowaniu zjawisk fizycznych (proces Ornsteina–Uhlenbecka).

Naszym zadaniem jest estymacja zmiennej losowej $X(T)$ w normie $L^p(\Omega)$. Definiujemy w tym celu obcięty randomizowany algorytm Eulera $\bar{X}^{RE}_{M,n}$, charakteryzowany poprzez gęstość siatki jednostajnej $n \in \mathbb{N}$ oraz parametr obcięcia procesu Wienera $M \in \mathbb{N}$. Wspomniana randomizacja, zaproponowana w odpowiedni sposób dla współczynika dryfu $a$, pozwala otrzymać zbieżność schematu przy założeniu wyłącznie borelowskiej mierzalności ze względu na zmienną czasową dla funkcji $a$. W pracy [3] wykazujemy także rząd zbieżności skonstruowanego schematu oraz udowadniamy jego asymptotyczną optymalność w odpowiedniej klasie dopuszczalnych algorytmów. W tym celu opieramy się na analitycznej złożoności obliczeniowej (IBC, Information-Based Complexity) oraz błędzie najgorszego przypadku. Otrzymane wyniki teoretyczne rozszerzają rezultaty z [2] poprzez uwzględnienie w modelu (1) procesów skokowo-dyfuzyjnych oraz przeliczalnej struktury szumu losowego.

Prezentujemy także rezultaty przeprowadzonych eksperymentów numerycznych. Zaproponowany algorytm został efektywnie zaimplementowany z użyciem architektury CUDA C na kartach graficznych Nvidia (GPU). Dzięki równoległemu symulowaniu wielu trajektorii procesu otrzymujemy znaczne przyspieszenie działania naszego algorytmu $\bar{X}^{RE}_{M,n}$. Najważniejsze części wspomnianego kodu udostępniamy w [3].

### Literatura

[1] S. N. Cohen, R. J. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications*, 2nd ed., Springer, New York, 2015, Chapter 17.

[2] P. M. Morkisz, P. Przybyłowicz, *Strong approximation of solutions of stochastic differential equations with time-irregular coefficients via randomized Euler algorithm*, Appl. Numer. Math. 78 (2014), 80–94.

[3] P. Przybyłowicz, M. Sobieraj, Ł. Stępień, *Efficient approximation of SDEs driven bycountably dimensional Wiener process and Poisson random measure*, SIAM J. Numer. Anal. 60 (2022), 824–855.